บทที่ 8

ตัวแบบแถวคอย

❑ แบบแถวคอย (waiting line system)

- ระบบแถวคอยหรือเรียกว่า
- ระบบคิว (queuing system)

- เป็นระบบที่อยู่ใกล้กับตัวเรามาก

- ในชีวิตประจำวันจะเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของระบบคิว

เช่น รอรถประจำทาง รอซื้ออาหาร รอจ่ายเงินในsupermarket รอยืม/คืนหนังสือที่ห้องสมุด รอให้แพทย์ตรวจรักษา รอสายโทรศัพท์จากศูนย์บริการ ฯลฯ

❑ การศึกษาในมุมมองของผู้บริหารระบบ

- ต้องการควบคุมดูแลเกี่ยวกับค่าใช้จ่ายในการให้บริการลูกค้า
- เป็นเครื่องมือวิเคราะห์ระบบบริการเพื่อประโยชน์ในการตัดสินใจต่าง ๆ
- ระบบแถวคอยเป็นระบบที่ปรากฏอยู่ในองค์กรทั้งภาครัฐและเอกชน
- ต้องการให้บริการลูกค้าอย่างดีที่สุด

❑ กิจการของภาครัฐและภาคเอกชนที่ผลิตสินค้าและให้บริการ

- ระบบการผลิตในโรงงาน
- ระบบบริการซ่อมแซมเครื่องจักรหรืออุปกรณ์เครื่องใช้
- ระบบการขนถ่ายสินค้า
- ระบบการขึ้นลงของเครื่องบินในสนามบินต่าง ๆ
- ระบบการชำระเงินค่าบริการต่าง ๆ
- ระบบการให้บริการในธนาคาร
- ระบบการจัดพิมพ์เอกสาร

❑ ลักษณะของระบบแถวคอย

- ปัจจัยที่กำหนดลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอยที่สำคัญประกอบด้วย 3 ส่วน

    1. ลูกค้า
    2. แถวคอย
    3. หน่วยให้บริการ

8.1 ลักษณะของระบบแถวคอย

- **1. ลูกค้า**

คือ จำนวนประชากรและลักษณะการเข้ามารับบริการของลูกค้า

1.1 จำนวนประชากร (population) คือ ผู้ที่มีโอกาสเข้ามาใช้บริการในระบบ

- จำนวนประชากรมากรายหรือไม่จำกัด (infinite population)

เช่น คลินิกแพทย์ ธนาคาร ปั๊มน้ำมัน supermarket

- จำนวนประชากรน้อยหรือประชากรจำกัด (finite population)

เช่น เครื่องถ่ายเอกสารในบริษัทที่มีพนักงานเพียง 10 คน

❑ ลักษณะของระบบแถวคอย

- **1.2 ลักษณะการเข้ามารับบริการของลูกค้า (arrival characteristic)**

1.2.1 แบบคงที่ (constant)

คือ ลูกค้าเข้ามารับริการเป็นจำนวนเท่า ๆ กัน ในแต่ละช่วงเวลา เช่น วันละ 30 คน ชั่วโมงละ 5 เครื่อง หรือลูกค้าแต่ละรายมาห่างกันคนละ 10 นาที ลักษณะเช่นนี้จะพบในสายการผลิตโรงงานอุตสาหกรรมที่ใช้ระบบอัตโนมัติ เช่น โรงงานผลิตเครื่องดื่ม โรงงานผลิตอาหารกระป๋อง

1.2.2 (random)

คือ ลูกค้าเข้ามาในลักษณะที่ไม่แน่นอน ไม่สามารถทราบล่วงหน้า และการเข้ามาของลูกค้าแต่ละรายะเป็นอิสระต่อกัน เช่น ลูกค้ามาเบิกเงินที่เครื่องฝากถอนอัตโนมัติ ลูกค้าที่ชำระเงินที่พนักงานรับจ่ายเงินใน supermarket บางช่วงเวลาอาจมีลูกค้าแต่ละรายมามาก หรือน้อย หรือไม่มีเลย

- **2. แถวคอย** ลักษณะสำคัญที่เกี่ยวข้องกับ คือความยาวของแถวคอย และรูปแบบการจัดระบบแถวคอย

2.1 ความยาวของแถวคอย

- ระบบลูกค้าสามารถรออยู่ในแถวคอยได้น้อยหรือแบบจำกัด

- ระบบลูกค้าสามารถรอในแถวคอยแบบมากหรือไม่จำกัด

2.2 รูปแบบการจัดระบบแถวคอย

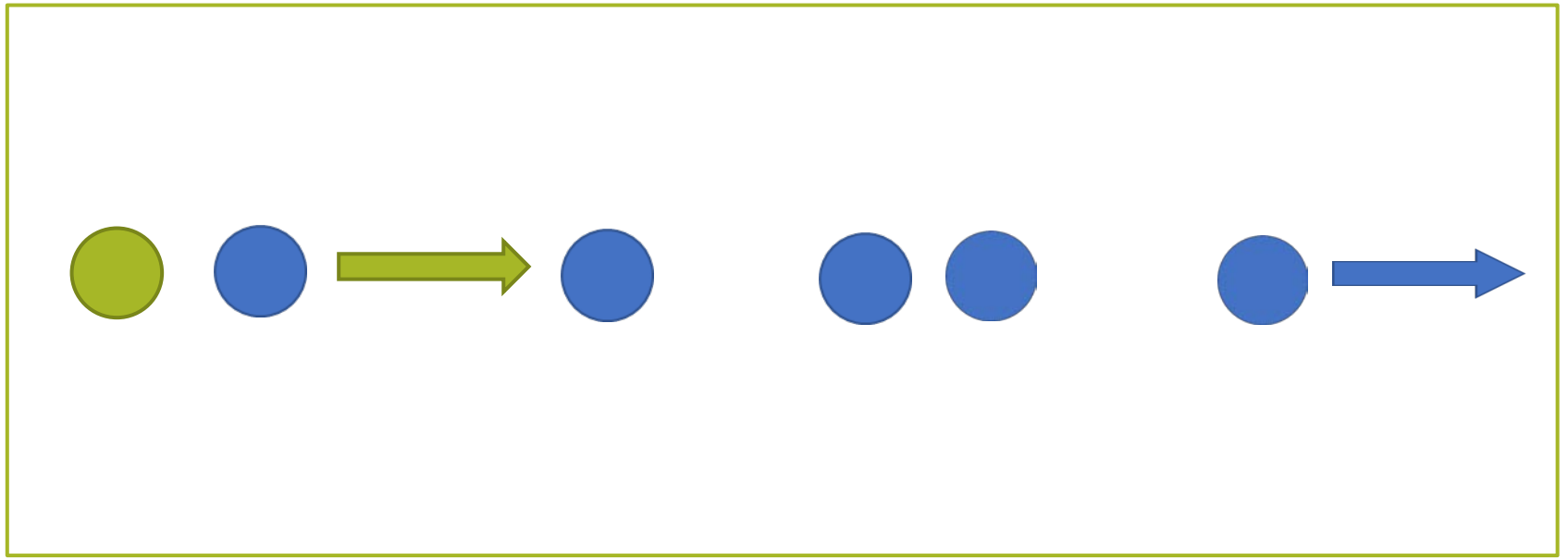
2.2.1 ระบบแถวคอยแบบช่องทางเดียว หรือขั้นตอนเดียว

(single channel,single phase system)

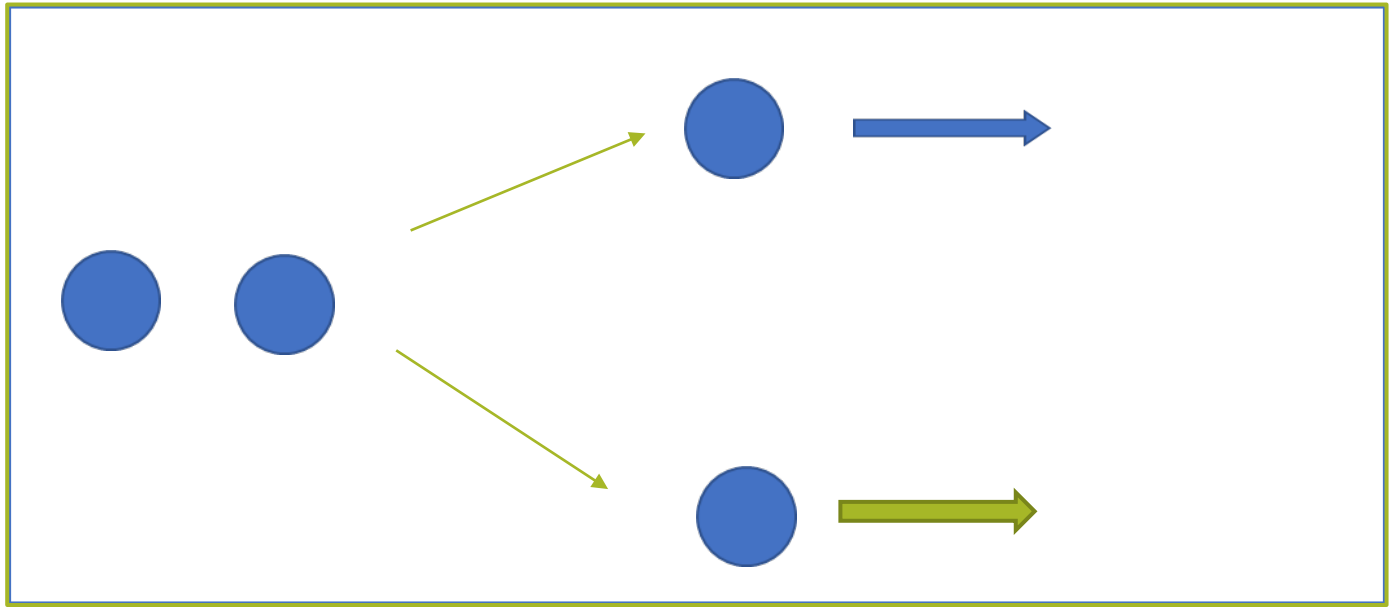
คือระบบบริการแถวคอยที่มีหน่วยให้บริการหน่วยเดียว เช่นเครื่องฝากถอน

เงินอัตโนมัติ

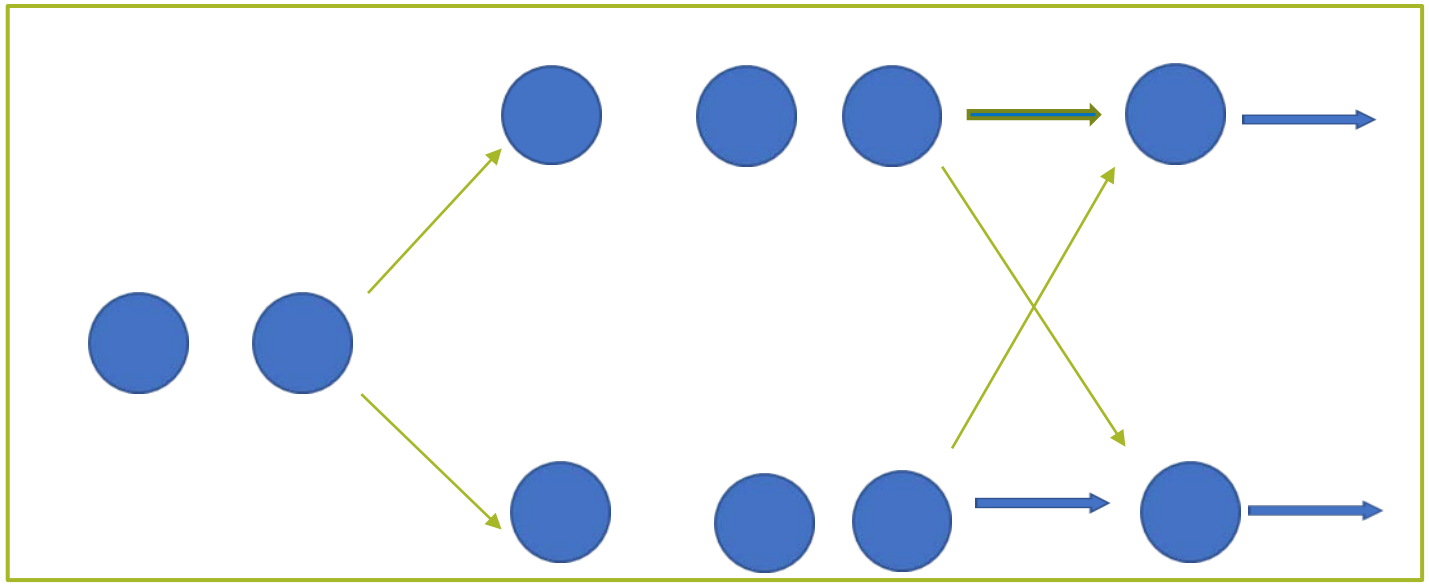
- **2.2.2 ระบบแถวคอยแบบช่องทางเดียว - หลายขั้นตอน** (single channel ,multiple phase system) คือระบบแถวคอยที่มีขั้นตอนการบริการหลายขั้นตอน เช่น แผนกจ่ายยาของโรงพยาบาลซึ่งมีพนักงานจ่ายยา 1 คน เมื่อคนไข้ชำระเงินแล้วรอรับยาจากพนักงานจ่ายยา 1 คน



2.2.3 ระบบแถวคอยแบบหลายช่องทาง – ขั้นตอนเดียว (multiple channel, single phase system) คือระบบแถวคอยที่มีขั้นตอนบริการขั้นเดียวแต่มีหน่วยในการให้บริการหลายหน่วย มากกว่า 1 หน่วย เช่นเคาเตอร์บริการฝากถอนเงินในธนาคารพานิชย์ที่มีพนักงานหลายคนและจัดให้มีแถวคอยแถวเดียวหรือบัตรคิว



- **2.2.4 ระบบแถวคอยแบบหลายช่องทาง – หลายขั้นตอน** (multiple channel ,multiple phase system) คือ คือระบบแถวคอยที่มีขั้นตอนบริการหลายขั้นแต่ละขั้นตอนมีหน่วยในการให้บริการหลายหน่วย มากกว่า 1 หน่วย เช่น เช่น แผนกจ่ายยาของโรงพยาบาลที่มีพนักงานรับเงินและจ่ายยาให้คนไข้แต่ละจุดจะมีพนักงานหลายคนทำหน้าที่เหมือนกัน



3. หน่วยให้บริการ ลักษณะสำคัญ

- 3.1 ระเบียบการให้บริการ
  - หมายถึงกฎเกณฑ์ที่ระบบนั้นใช้ในการกำหนดว่าจะให้บริการแก่ลูกค้ารายใดก่อน เช่น
    - 1) ลูกค้าที่มาก่อนจะได้รับบริการก่อน
    - 2) ลูกค้าที่มาทีหลังจะได้รับบริการก่อน
    - 3) ลูกค้าที่มีความจำเป็นมากกว่าจะได้รับบริการก่อน
- 3.2 ลักษณะการให้บริการ

หน่วยบริการในระบบอาจให้บริการแบบใดแบบหนึ่ง

3.1.1 แบบคงที่ คือในการบริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาเท่า ๆ กัน

3.1.2 แบบสุ่ม ลูกค้าแต่ละรายมีลักษณะไม่เหมือนกัน หรือให้บริการลูกค้าแต่ละคนไม่เท่ากัน จึงใช้เวลาในการให้บริการไม่เท่ากัน

8.2 ข้อมูลการมาเข้ารับบริการและให้บริการ

- ลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย จะต้องเก็บรวบรวมข้อมูลจากการมาเข้ารับบริการและการให้บริการ

ถ้าข้อมูลเป็นลักษณะสุ่ม (random) ต้องศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็นของข้อมูลว่ามีลักษณะอย่างไร

- แบบปกติ (normal distribution)
- แบบปัวซง (Poisson distribution)
- แบบเอกซ์โปเนนเชียล (exponential distribution)

กรณีข้อมูลอยู่ในลักษณะจำนวนลูกค้าต่อหน่วยเวลา

- อัตราการเข้ามารับบริการ ซึ่งหมายถึงจำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการได้ใน 1 หน่วยเวลา หรือ อัตราการให้บริการซึ่งหมายถึง จำนวนลูกค้าที่ให้บริการได้ใน 1 หน่วยเวลา เช่นการแจกแจงความน่าจะเป็นของอัตราการเข้ามารับบริการสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่มีลูกค้าเข้ามา X ราย ได้ดังนี้

$$P(X) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{xi}$$,เมื่อ X = 1 2 3 4 ...n

X = จำนวนลูกค้าต่อหน่วยเวลา

λ = อัตราการเข้ามารับบริการ

e = 2.7183

กรณีข้อมูลที่รวบรวมในลักษณะเวลา

- คือ เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการหรือเวลาในการให้บริการ
- เช่นการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาในการให้บริการสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่จะใช้เวลาในการให้บริการมากกว่า x นาที ได้โดยใช้สูตรดังนี้

$$P(\text{service time} > x = e^{-\mu x} \text{ , เมื่อ } x>0$$

μ = อัตราการให้บริการ

X = เวลาที่ใช้ในการให้บริการ

e =2.7183

8.3 ตัวแปรแถวคอย

- M = Markovian หมายถึงการเข้ารับบริการลักษณะสุ่ม ในอัตราเฉลี่ย λ แจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซงหรือหมายถึงเลาะหว่างการเข้ามารับบริการที่มีค่าเฉลี่ย $1/\lambda$ ซึ่งแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
- หรือ M คือลักษณะการให้บริการแบบสุ่มมีค่าเฉลี่ย $1/\mu$
- D = Deterministic หมายถึงการเข้ามารับบริการ หรือการให้บริการที่มีลักษณะคงที่
- G = General การเข้ามารับบริการ หรือ การให้บริการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ

8.4 สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบแถวคอย

- สัญลักษณ์ที่ใช้ในการแสดงข้อมูลต่าง ๆในตัวแบบแถวคอย มีดังนี้
- λ = อัตราการเข้ามารับบริการ (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา)
- μ = อัตราการให้บริการ (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่หน่วยให้บริการแต่ละหน่วยให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา)
- $\frac{1}{\mu}$ = เวลาโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการให้บริการลูกค้า 1 ราย
- P = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน
- p_0 = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

❑ สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบแถวคอย

- L_s = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ
- L_q = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย
- w_s = เวลาที่เฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายเสียไปในการรับบริการในระบบ
- w_q = เวลาที่เฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายเสียไปในการรับบริการในแถวคอย
- p_n = ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า n รายในระบบ

- *** ข้อมูลของค่า λ และ μ ที่ใช้ในการคำนวณจะต้องเป็นข้อมูลในเวลาเดียวกัน เช่น การเข้ามารับบริการเป็นจำนวนลูกค้าเป็นชั่วโมง อัตราการให้บริการต้องเป็นจำนวนลูกค้าต่อชั่วโมง ด้วย

8.5 ตัวแบบ M/M/1

- ระบบแถวคอยที่จะใช้ตัวแบบ M/M/1
- ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้

1) อัตราการเข้ามารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวซอง

2) เวลาในการให้บริการแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือแจกแจงแบบปัวซง

3) เป็นการให้บริการแบบช่องทางเดียว ขั้นตอนเดียว

4) ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย

5) จำนวนประชากรมากราย

6) มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน

- สมมติฐานของตัวแบบM/M/1 ได้แก่ อัตราการเข้ามารับบริการน้อยกว่าอัตราการให้บริการ

หรือ $\lambda < \mu$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad p = \lambda / \mu$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad p_0 = 1 - \lambda / \mu$$

$$w_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

ตัวอย่างที่ 8.1

- ร้านสะดวกซื้อแห่งหนึ่งมีพนักงานเก็บเงิน 1 คน จากการเก็บข้อมูลในอดีตพบว่าลูกค้าเข้ามาชำระเงินค่าสินค้าเป็นแบบสุ่มเฉลี่ยชั่วโมงละ 20 ราย มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซง ในขณะที่การให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลามากน้อยต่างกัน โดยมีค่าเฉลี่ยรายละ 2 นาที มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งหมายถึงอัตราการให้บริการเฉลี่ย 60/2 = 30 ราย/ชั่วโมง จำนวนประชากรมีมากรายและจำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยมีได้ไม่จำกัด โดยที่ใครมาก่อนจะได้รับบริการก่อน พิจารณาจากข้อมูลทั้งหมดแล้วสอดคล้องกับตัวแบบ M/M/1ทั้งนี้ก่อนใช้ตัวแบบจะต้องตรวจสอบสมมติฐานของตัวแบบซึ่งพบว่าค่า $\lambda < \mu$ (λ = 20 ราย/ชั่วโมง μ = 30 รายชั่วโมง)

- จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{30 - 20} = 2$ ราย
- จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20^2}{30(30 - 20)} = 1.33$ ราย
- เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายใช้ในระบบ $w_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30 - 20} = 1/10$ ชั่วโมง (6นาที)
- เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายใช้ในแถวคอย $w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{30(30 - 20)} = 1/15$ ชั่วโมง (4 นาที)

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงานหรือการใช้งานของระบบ

$$p = \lambda / \mu = 20 / 30 = 0.67$$

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$$p_0 = 1 - \lambda / \mu = 1 - 20/30 = 1 - 0.67 = 0.33$$

8.6 ตัวแบบM/M/s

- ตัวแบบนี้มีลักษณะเหมือน M/M/1 เกือบทุกประการ ยกเว้นจะใช้ได้เหมาะสมกับระบบแถวคอยที่มีลักษณะขั้นตอนเดียวแต่หลายช่องทางบริการ สรุปลักษณะของระบบแถวคอยที่ควรใช้ตัวแบบนี้คือ
- 1) อัตราการเข้ามารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวซง
- 2) เวลาในการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรืออัตราการให้บริการมีการแจกแจงแบบปัวซง
- **3) เป็นการให้บริการหลายช่องทาง ขั้นตอนเดียว**
- 4) ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
- 5) จำนวนประชากรมากราย
- 6) มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน

- สมมติฐาน M/M/s ได้แก่อัตราการมารับบริการน้อยกว่าผลคูณของจำนวนช่องทางบริการกับอัตราการให้บริการ $\lambda < s\mu$
- การใช้ตัวแบบ M/M/s เพื่อวิเคราะห์ระบบแถวคอย จะใช้สูตรการคำนวณดังนี้

$$P = \lambda / s\mu$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \left[\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \times \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right]}$$

$$L_q = P_0 \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^s \cdot p}{s!\,(1-p)^2} \right\}$$

$$L_s = L_q + \lambda/\mu$$

$$W_q = L_q + \lambda$$

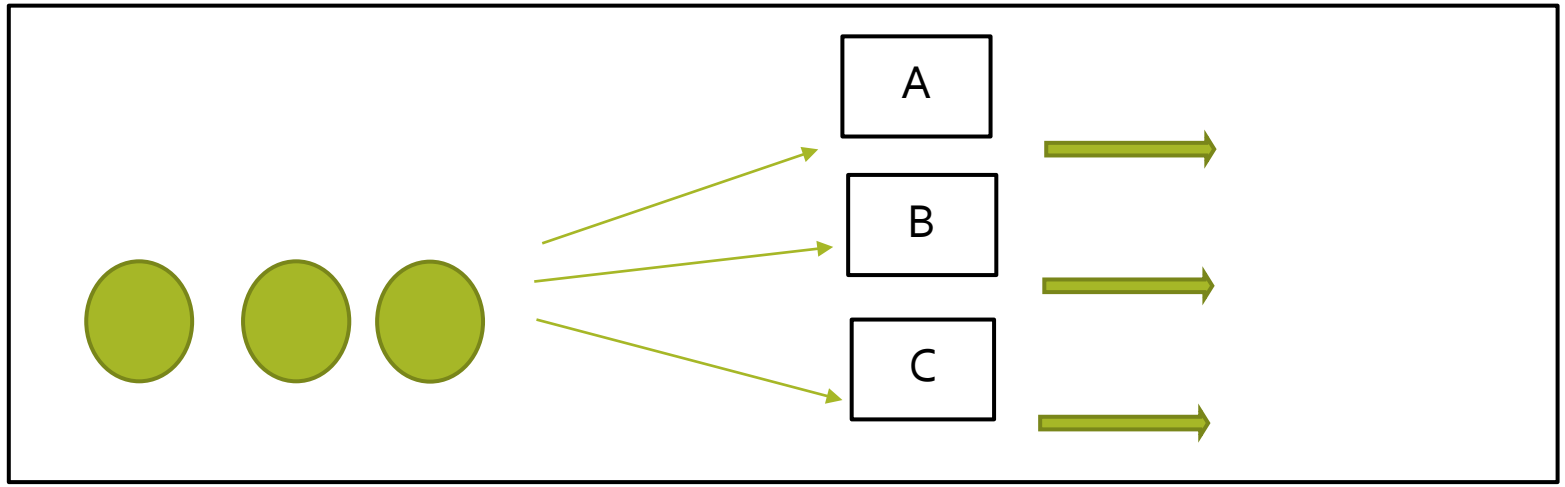
$$W_s = W_q + 1/\mu$$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } n \leq s$$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{(s!s)^{n-s}} \quad \text{เมื่อ } n > s$$

ตัวอย่างที่ 8.2

- โรงภาพยนตร์แห่งหนึ่งพนักงานให้บริการจำหน่ายบัตรชมภาพยนตร์ จำนวน 3 คน โดยลูกค้าจะเข้าแถวเป็นแถวเดียว และเมื่อพนักงานคนใดว่าง ลูกคาจะเข้ารับบริการที่พนักงานคนนั้น ลูกค้าของโรงภาพยนตร์มีจำนวนมากรายและมีพื้นที่ที่ลูกค้าจะเข้าแถวรอในแถวคอยได้มากราย โดยเฉลี่ยแลวลูกค้าจะเข้ามาเพื่อซื้อบัตรชมภาพยนตร์ในอัตราเฉลี่ย 72 ราย/ชั่วโมง (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซง) ในขณะที่พนักงานแต่ละคนใช้เวลาในการให้บริการเฉลี่ยรายละ 2 นาที ผการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล) หรือให้บริการได้เฉลี่ยชั่วโมงละ 30 ราย



- จากการพิจารณาข้อมูล ลักษณะของตัวแบบแถวคอย สมมติฐานของตัวแบบสรุปได้ว่าสามารถใช้ตัวแบบ M/M/s ในการวิเคราะห์การให้บริการซื้อบัตรชมภาพยนตร์ ดังนี้

- ค่า λ = 72 ราย/ชั่วโมง และ มีค่า $\lambda < s\mu$ คือ $72 < 3(30)$

- ค่า μ = 30 ราย/ชั่วโมง

- ค่า s = 3 หน่วยบริการ

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงานหรือการใช้งานของระบบ

$$P = 72/90 = 0.80$$

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$$P_0 = 1/\left\{\frac{(2.4)^0}{0!} + \frac{(2.4)^1}{1!} + \frac{(2.4)^2}{2!}\right\} + \left\{\frac{(2.4)^3}{3!} \times \frac{90}{90-72}\right\} = 0.0562^{**}$$

** คำตอบ = 0.562 คือ ค่าที่ได้จากการเปิดตาราง $\lambda / s\mu = 0.80$ และ ค่า s = 3

(แต่ถ้าหาค่าคำนวณจะได้ = 0.0595)

- จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย

$$L_q = \frac{0.562\ (2.4)^3\ (0.80)}{3!(1-0.80)^2} = 2.589 \text{ ราย}$$

- จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

$$L_s = 2.589 + 2.4 = 4.989 \text{ ราย}$$

- เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าอยู่ในแถวคอย

$$W_q = 2.589/72 = 0.036 \text{ ชั่วโมง} = 2.16 \text{ นาที}$$

- เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าอยู่ในระบบ

$$W_s = 0.036 + 1/30 = 0.0693 \text{ ชั่วโมง} = 4.16 \text{ นาที}$$

การเพิ่มประสิทธิภาพหน่วยให้บริการ

- การที่จะพัฒนาระบบแถวคอยให้สามารถบริการลูกค้าได้ดีขึ้นนั้น ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงการเพิ่มจำนวนหน่วยให้บริการเพียงอย่างเดียว อาจจะมีจำนวนหน่วยให้บริการเท่าเดิม แต่เป็นหน่วยให้บริการที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น การเพิ่มประสิทธิภาพให้หน่วยบริการ อาจมีหลายวิธีดังนี้
- 1. เพิ่มเครื่องมือ อุปกรณ์ เช่น รถยก
- 2. เปลี่ยนเครื่องมือที่ทันสมัยขึ้น หรืออัตโนมัติมากขึ้น
- 3. เพิ่มจำนวนพนักงานในหน่วยบริการ

แต่ละวิธีจะช่วยทำให้บริการลูกค้าได้รวดเร็วขึ้น ทำให้อัตราการให้บริการสูงขึ้น ซึ่งจะส่งผลดีต่อประสทธิภาพในการให้การบริการของระบบ รวมถึงค่าใช้จ่ายในการเสียเวลาของลูกค้าจะลดลงด้วย