

บทที่ 4

การแก้ปัญหาที่ต้องการหาค่าต่ำสุดโดยวิธี กราฟ

การคำนวณต้นทุนการผลิตแบบง่าย



การแก้ปัญหาต่ำสุด

- ตัวอย่าง ปัญหาการหาค่าต่ำสุด

บริษัทเวเฟอร์ ผลิตขนมซ็อกโกแลตทั้งบรรจุกล่อง และซ่งขายตามจำนวนที่ลูกค้าต้องการ กำลังพิจารณาผลิตสินค้าใหม่ คือ ผลไม้เคลือบซ็อกโกแลต

โดยจะเริ่มจากมะม่วงและสับปะรดก่อน เนื่องจากมีรสเปรี้ยว โดยนำมาอบให้แห้งเป็นชิ้นเล็ก ๆ ตามขนาดที่ ต้องการ เคลือบซ็อกโกแลต ขนมจะมีรสเปรี้ยวอมหวาน ซึ่งลูกค้าชอบ ทั้งยังเป็นการสนับสนุนผลไม้ไทยด้วย

- สินค้าเคลือบช็อคโกแลตหรือสวิตแมงโก จะเคลือบด้วยช็อคโกแลตสีน้ำตาลไหม้ มีต้นทุนการผลิต กิโลกรัมละ 100 บาท และ ใช้เวลาในการผลิตโดยเฉลี่ยแล้วกิโลกรัมละ 10 นาที
- ส่วนสับปะรดเคลือบช็อคโกแลตหรือสวิตไพน์ แอปเปิ้ล จะเคลือบช็อคโกแลตสีขาว มีต้นทุนการผลิตกิโลกรัมละ 150 บาท ใช้เวลาในการผลิตโดยเฉลี่ยกิโลกรัมละ 5 นาที

- ทั้งนี้ บริษัทกันเวลาในการผลิตสินค้าใหม่ทั้งสองชนิดไว้ไม่เกิน 13 ชั่วโมง อย่างไรก็ตาม บริษัทต้องการผลิตสินค้าทั้ง 2 ชนิดรวมกันไม่ต่ำกว่า 100 กิโลกรัม

โดยเป็นสินค้าสวิตแมงโกอย่างน้อย 30 กิโลกรัม บริษัทต้องการข้อสรุปเพื่อแจ้งฝ่ายผลิตว่าจะผลิตสินค้าทั้ง 2 ชนิดนี้ อย่างละกี่กิโลกรัม

กำหนดให้

M = จำนวนการผลิตสวิตแมงโก (กิโลกรัม)

P = จำนวนการผลิตสวิตไพน์แอปเปิ้ล (กิโลกรัม)

Minimize total cost = 100M + 150P

Subject to :

$$10M + 5P \leq 780 \quad \dots(1) \text{ เวลาในการผลิต}$$

$$M + P \geq 100 \quad \dots(2) \text{ ความต้องการรวม}$$

$$M \geq 30 \quad \dots(3) \text{ สวิตแมงโก}$$

$$M, P \geq 0$$

แก้สมการที่ 1

$$10M + 5P \leq 780 \quad \dots(1) \text{ เวลาในการผลิต}$$

$$\text{กำหนดให้ } P = 0$$

$$\text{ดังนั้น } 10M = 780$$

$$\text{จะได้ } M = 780/10 = 78$$

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } M = 0$$

$$\text{ดังนั้น } 5P = 780$$

$$\text{จะได้ } P = 780/5 = 156$$

สรุปจะได้จุดตัด (M,P) คือ $(78, 156)$ สมการที่ 1

แก้สมการที่ 2

$$M + P \geq 100 \quad \dots(2)$$

ถ้า $M = 0$

จะได้ $P = 100$

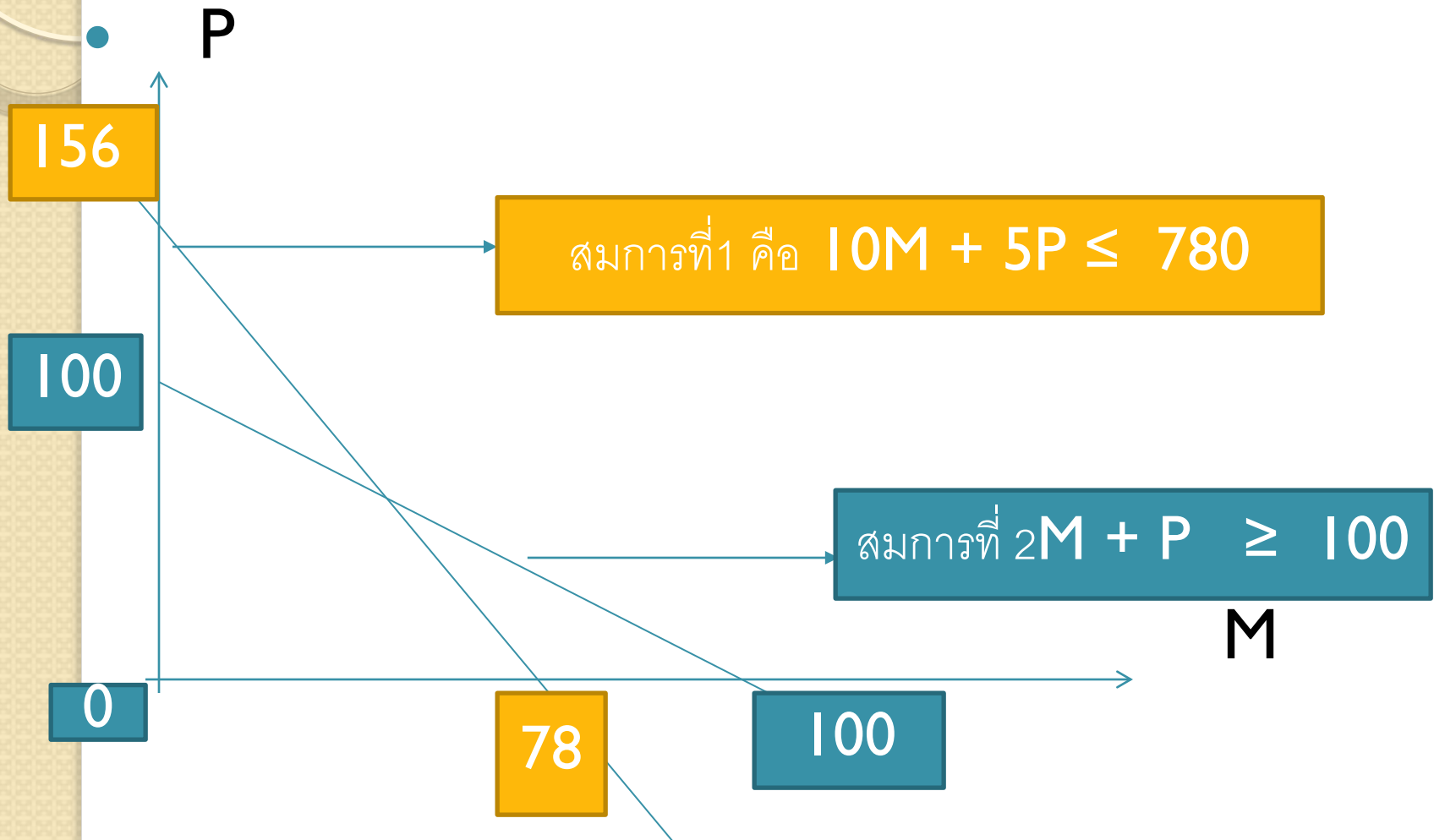
ถ้า $P = 0$

จะได้ $M = 100$

สรุปสมการที่ 2 จะได้จุดตัด คือ $(M, P) = (100, 100)$

- สมการที่ 1 ได้จุดตัด คือ $(78, 156) = (M, P)$
- สมการที่ 2 ได้จุดตัด คือ $(100, 100) = (M, P)$
- สมการที่ 3 ได้จุดตัด คือ $M = 30, P = 0 = (30, 0)$

นำมาแก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟ



ตารางแสดงการหาต้นทุน

| จุดยอด | พิกัด (M, P) | ต้นทุนรวม = 100M+150P |
|-----------|--------------|---------------------------------|
| สมการที่1 | 78, 156 | $100(78) + 150(156) = 31200$ |
| สมการที่2 | 100, 100 | $100(100) + 150(100) = 25000$ |
| สมการที่3 | 30, 0 | $100(30) = 3000$ |

จุดตัด E คือ $M = 56, P = 44$ แทนค่า
 $100(56) + 150(44) = 12,200$ บาท

แก้ปัญหาโดยใช้วิธีแก้สมการระหว่างเส้นตรงเงื่อนไข

- บังคับข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ซึ่งเป็นเส้นตรงก่อกำเนิดจุด B

$$10M + 5P = 780 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$M + P = 100 \quad \dots\dots\dots(2)$$

สมการ(2) คูณด้วย 5 จะได้
.....สมการที่ ... (4)

$$5 * M + 5 * P = 5 * 100$$
$$5M + 5P = 500$$

สมการ(1) - สมการ(4)จะได้

$$10M + 5P = 780$$

จะได้ สมการที่ 1 ลบกับ สมการที่ 4

$$5M + 0P = 280$$

$$M = 280/5$$

$$M = 56 \text{ กิโลกรัม}$$

- แทนค่า $M = 56$ ในสมการ(2)จะได้ $1M + 1P = 100$

$$56 + 1P = 100$$

$$P = 100 - 56$$

$$P = 44 \text{ กิโลกรัม}$$

$$\begin{aligned} \text{ต้นทุนรวม} &= 100M + 150P \\ &= 100(56) + 44(150) \\ &= \mathbf{12,200} \text{ บาท} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า บริษัทควรผลิตสวิตแมงโก (**M**) = 56 กิโลกรัม
 และสวิตไพน์แอปเปิล (**P**) = 44 กิโลกรัม
จะมีต้นทุนต่ำที่สุดคือ 12,200 บาท

จากผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดของบริษัทเวเฟอร์

คือ บริษัทควรผลิตสวิตแมงโก 56 กิโลกรัมและสวิตโฟนแอปเปิล 44 กิโลกรัม

จะทำให้ต้นทุนรวมต่ำที่สุด สามารถนำมาวิเคราะห์เปรียบเทียบกับเงื่อนไขบังคับต่างๆ ของปัญหาได้ดังนี้

การใช้เวลาในการผลิต $10(56) + 5(44) = 780$ นาที

กล่าวได้ว่าตัวแปรส่วนขาดของเงื่อนไขข้อที่ 1 $= 0$; $S_1 = 0$

เงื่อนไขความต้องการรวม : $56 + 44 = 100$ กิโลกรัม

- เงื่อนไขความต้องการรวม : $56 + 44 = 100$ กิโลกรัม
แสดงว่าถ้าผลิตตามผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดที่คำนวณได้ จะ
ผลิตสินค้าเท่ากับความต้องการรวมขั้นต่ำสุด 100 กิโลกรัม
หรือ

กล่าวได้ว่าตัวแปรส่วนเกินของเงื่อนไขข้อที่ 2 = 0
; $S_2 = 0$

- เงื่อนไขความต้องการสวิตแมงโก : $1M = 30$ กิโลกรัม
แสดงว่า ถ้าผลลัพธ์ ที่เหมาะสมที่สุดที่คำนวณได้

จะผลิตสวิตแมงโก 56 กิโลกรัม

ซึ่งสูงกว่าที่ต้องการขั้นต่ำ 26 กิโลกรัม

แสดงว่าเงื่อนไขข้อที่ 3 มีตัวแปรส่วนเกิน $56 - 30$

$= 26$ กิโลกรัม

$S_3 = 26$

ตัวอย่าง แก้ปัญหาการหาค่าต่ำสุด

- Minimize total cost = $6X_1 + 3X_2$
- ข้อจำกัด สมการที่ 1 ... $2X_1 + 4X_2 \geq 16$
- สมการที่ 2 .. $4X_1 + 3X_2 \geq 24$
- $X_1, X_2 \geq 0$

- แก้มสมการที่1.... $2X_1 + 4X_2 \geq 16$
- ถ้าให้ $X_2 = 0$
- จะได้ $2X_1 = 16$
- $X_1 = 16 / 2 = 8$
-
- ถ้าให้ $X_1 = 0$
- จะได้ $4X_2 = 16$
- $X_2 = 16 / 4 = 4$
- สรุปได้จุด (X_1, X_2) คือ $(8, 4)$

- แก่สมการที่ 2 $4X_1 + 3X_2 \geq 24$
- ถ้าให้ $X_2 = 0$
- จะได้ $4X_1 = 24$
- $X_1 = 24 / 4 = 6$
- ถ้าให้ $X_1 = 0$
- จะได้ $3X_2 = 24$
- $X_2 = 24 / 3 = 8$
- สรุปได้จุด (X_1, X_2) คือ $(6, 8)$

- สรุปได้จุดตัด สมการที่ 1 (X_1, X_2) คือ ๖๖ (8,4)

- สรุปได้จุดตัด สมการที่ 2 (X_1, X_2) คือ (6,8)

- แก้มุมตัด E

- สมการที่ 1 $2X_1 + 4X_2 \geq 16$

- สมการที่ 2 $4X_1 + 3X_2 \geq 24$

- เอา เลข 2 คูณกับ สมการที่ 1

- จะได้สมการที่ 3 $4X_1 + 8X_2 = 32$

- เอาสมการที่ 3 ลบ กับสมการที่ 2.. $4X_1 + 3X_2 = 24$

- จะได้ $0X_1 + 5X_2 = 8$

- $X_2 = 8/5$

- $X_2 = 1.6$

- จุดตัด E
- เมื่อได้ $X_2 = 1.6$
- แทนค่าในสมการที่ 1
- $2X_1 + 4X_2 = 16$
- $2X_1 + 4(1.6) = 16$
- $2X_1 = 16 - 6.4$
- $X_1 = 9.6 / 2 = 4.8$
- สรุปจุดตัด $E = (4.8, 1.6) = (X_1, X_2)$

X2

สมการที่ 2 $4X_1 + 3X_2 \geq 24$

สมการที่ 2

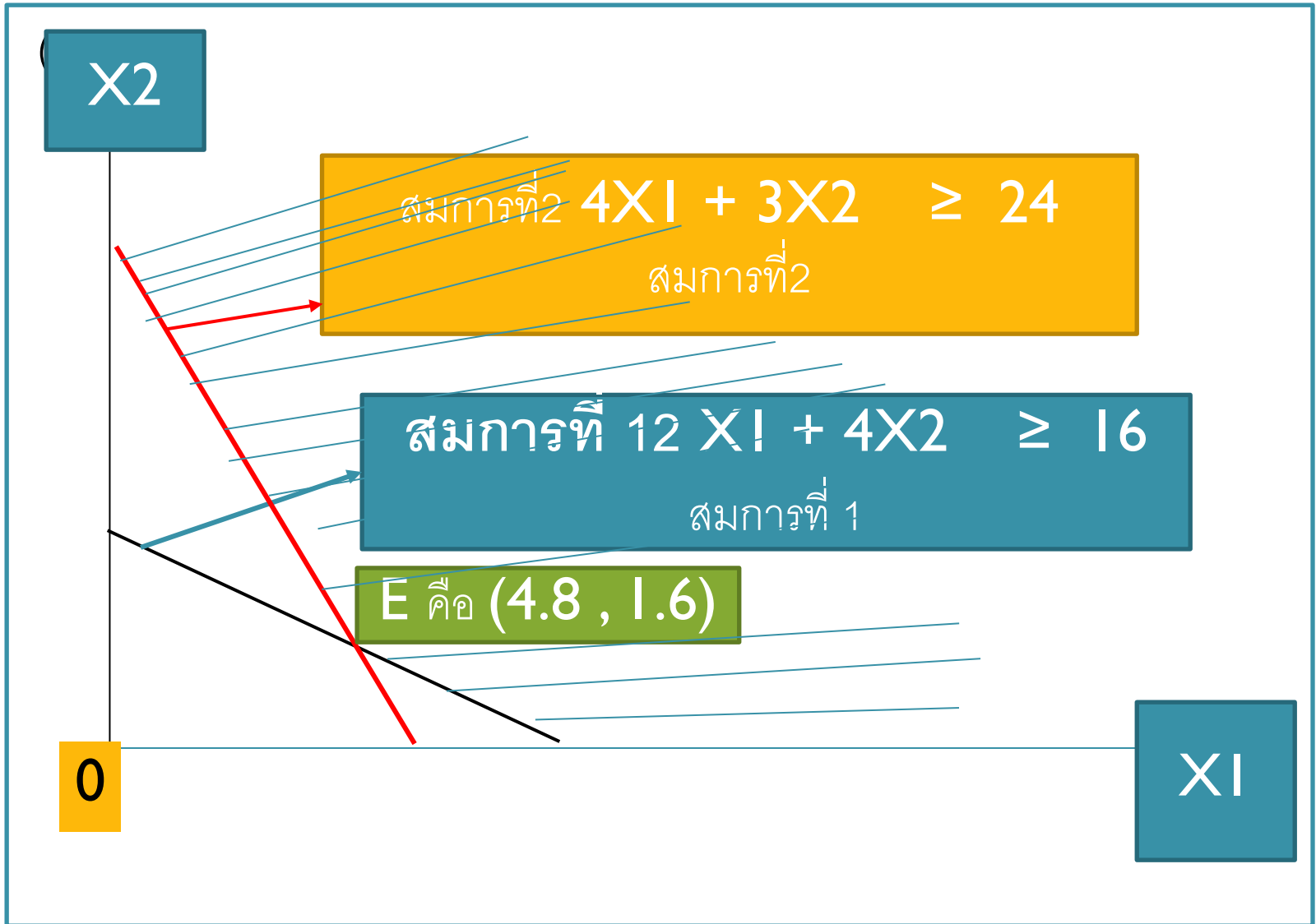
สมการที่ 1 $12X_1 + 4X_2 \geq 16$

สมการที่ 1

E คือ (4.8, 1.6)

0

X1



| จุดตัด | จุด (X1,X2) | Minimize = 6X1 + 3X2 | Total cost |
|------------|-------------|----------------------|-------------|
| สมการที่ 1 | (8 ,4) | 6(8)+ 3(4) | 60 |
| สมการที่ 2 | (6,8) | 6(6)+3(8) | 60 |
| จุด E | (4.8 ,1.6) | 6(4.8)+3(1.6) | 33.6 |

สรุป จะได้ต้นทุนรวมต่ำสุด คือ $X_1=4.8$, $X_2 =1.6$ จำนวน 33.6 บาท

- ตัวอย่างที่ 2 .มยุราเป็นเจ้าของฟาร์มโคนมหนองโพต้องการปรับเปลี่ยนการให้อาหารโคนมเสียใหม่ เพื่อให้โคนมแต่ละตัวได้รับสารอาหารครบตามต้องการ โดยฟาร์มจ่ายต้นทุนค่าอาหารต่ำที่สุด

อาหารที่ให้โคนมกินในแต่ละวันเป็นอาหารชั้น 2 ชนิด คืออาหารชั้น **A** ราคา กิโลกรัมละ 3 บาท และอาหารชั้น **B** ราคา กิโลกรัมละ 5 บาท

อาหารแต่ละชนิดให้สารอาหาร 4 อย่างที่โคนมต้องการในปริมาณที่แตกต่างกันดังนี้

| สารอาหาร | ร้อยละที่มีใน 1 กก. ของอาหาร | | ปริมาณขั้นต่ำ ที่ โคนมควรร ได้รับใน 1 วัน (กก.) |
|----------|------------------------------|--------------------|---|
| | อาหารชั้น A | อาหารชั้น B | |
| 1 | 20 | 30 | 4 |
| 2 | 0 | 30 | 1.5 |
| 3 | 20 | 15 | 3 |
| 4 | 10 | 20 | 3 |

- ให้ช่วยหาส่วนผสมอาหารชั้นที่จะให้แก่โคนมแต่ละตัวที่มีต้นทุนค่าอาหารต่อวันต่ำที่สุด โดย

1. สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาข้างต้น
2. แก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟ

1. สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาข้างต้น

- กำหนดให้
- **A** คือ.อาหารข้อ**A**.
- **B** คือ..อาหารชั้น**B**
- **Minimize total cost = $3A + 5B$**
- สารที่ 1 คือ **$20A + 30B \geq 4$**
- สารที่ 2 คือ **$0A + 30B \geq 1.5$**
- สารที่ 3 คือ **$20A + 15B \geq 3$**
- สารที่ 4 คือ **$10A + 20B \geq 3$**
- เมื่อ **A** และ **B ≥ 0**