บทที่ 5 ตอน 2

การประมาณค่าของข้อมูลด้านคุณภาพ

(Estimation)

วิธีการที่ใช้ในการประมาณค่า

- **การประมาณค่าซึ่งเป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ของประชากร เช่น**

  - ค่าเฉลี่ย

  - ค่าสัดส่วนด้วยค่าประมาณ (estimate)

ตัวอย่างที่เลือกมาเป็นตัวแทนของประชากรจะมี 2 วิธี

1. การประมาณแบบจุด(Point Estimation)

2. การประมาณแบบช่วง(Interval Estimation)

ค่าพารามิเตอร์และค่าสถิติที่สำคัญ

ค่าวัดลักษณะ	ประชากร (พารามิเตอร์)	ตัวอย่าง (ค่าสถิติ)
ค่าเฉลี่ย	μ	$\overline{x}$
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	σ	S.D. หรือ S
ความแปรปรวน	σ^2	S^2
สัดส่วน	P	$\hat{p}$
จำนวน หรือขนาด	N	n

ระดับความเชื่อมั่น (Confidence Level)

หมายถึง โอกาสที่พารามิเตอร์ของประชากรจะอยู่ในช่วงของค่าที่ประมาณได้ แทนด้วย $(1-\alpha)100\%$ หรือเรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval)

เรียก α ว่า ความผิดพลาดที่เกิดขึ้น

ช่วงความเชื่อมั่น 99% α **= 0.01**

ช่วงความเชื่อมั่น 95% α **= 0.05**

Z∞/2 = 1.96

ช่วงความเชื่อมั่น 90% α **= 0.10**

Z∞/2 = 1.645

ตาราง ค่า Z สำหรับ ∞/2 ที่นิยมใช้ประมาณค่า

ช่วงความเชื่อมั่น	α	พื้นที่ปลาย	ค่า $Z_{\infty/2}$	
99 %	0.01	2.58	0.005	
95 %	0.05	1.96	0.025	
90 %	0.10	1.645	0.05	
98 %	0.02	2.33	0.01	

การประมาณค่า

1. การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร 1 กลุ่ม

2. การประมาณผลต่างค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม

3. การประมาณค่าสัดส่วนประชากร 1 กลุ่ม

4. การประมาณผลต่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร 1 กลุ่ม

กรณีที่ 1 ทราบความแปรปรวนของประชากร(ทราบ σ^2)

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

กรณีที่ 2 ไม่ทราบความแปรปรวนของประชากร แต่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่

(ไม่ทราบ σ^2 แต่ $n \geq 30$)

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

ตัวอย่างที่ 5.1 (จาก ตย.4.18)

น้ำหนักของขนมชนิดหนึ่งที่ผลิตโดยบริษัทผู้ผลิตขนมรายหนึ่งมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ ด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.5 กรัม ถ้าเลือกตัวอย่างสุ่มจากขนมที่ผลิตโดยโรงงานแห่งนี้มาจำนวน 30 ชิ้น ได้ข้อมูลดังนี้

จงประมาณช่วงความเชื่อมั่น 95%ของค่าเฉลี่ยของประชากรของน้ำหนักขนมที่ผลิตจากดรงงานแห่งนี้

ตัวอย่างที่ 5.1กำหนดให้ $\bar{X} = \frac{896.49}{30} = 29.88$ $Z\infty/2 = 1.96$ n = 30 $\sigma = 1.5$

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$29.88 - 1.96\left(\frac{1.5}{\sqrt{30}}\right) < u < 29.88 + 1.96\left(\frac{1.5}{30}\right)$$

$$29.88 - 1.96\left(\frac{1.5}{5.47}\right) < u < 29.88 + 1.96\left(\frac{1.5}{5.47}\right)$$

$$29.88 - 1.96\ (\ 0.274\ ) < u < 29.88 + 1.96\ (\ 0.274\ )$$

$$29.88 - 0.537 < u < 29.88 + 0.537$$

29.34… < u < …30.42….

<u>ตอบ</u> ดังนั้นค่าเฉลี่ยของน้ำหนักขนมประมาณ 29.34 กรัม ถึง 30.42 กรัม ต่อชิ้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

ตัวอย่า.งที่5.2 กำหนดให้ X = $\frac{540}{32}$ = 16.88 Z∞/2 = 1.645 n = 32 σ = 2

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$16.88 - 1.645\left(\frac{2}{\sqrt{32}}\right) < u < 16.88 + 1.645\left(\frac{2}{32}\right)$$

$$16.88 - 1.645\left(\frac{2}{5.65}\right) < u < 16.88 + 1.645\left(\frac{2}{5.65}\right)$$

16.88 – 1.645 (0.354) < u < 16.88 + 1.645 (0.354)

16.88 – 0.582 < u < 29.88 + 0.582

16.29… < u < …30.46….

<u>ตอบ</u> ดังนั้นค่าเฉลี่ยของน้ำหนักขนมประมาณ 16.29 กรัม ถึง 30.46 กรัม ต่อชิ้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม

กรณีที่ 1 ทราบความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่ม

(ทราบ σ_1^2, σ_2^2)

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

กรณีที่ 2 ไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่ม แต่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่

(ไม่ทราบ σ_1^2, σ_2^2 และ $n_1, n_2 \geq 30$)

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

ตัวอย่างที่5.3 นักเศรษฐศาสตร์คนหนึ่งทำการสุ่มเลือกร้านค้าในบริเวณห้างสรรพสินค้า ก จำนวน 32 ร้าน พบว่ามีรายได้เฉลี่ยต่อเดือนเท่ากับ 6 ล้านบาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1 ล้านบาท และสุ่มเลือกจากห้างสรรพสินค้า ข จำนวน 30 ร้าน พบว่ามีรายได้เฉลี่ยต่อเดือนเท่ากับ 3.5 ล้านบาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5 ล้านบาท จงประมาณช่วงความเชื่อมั่น 90% ของผลต่างของรายได้เฉลี่ยต่อเดือนของร้านค้าในห้างสรรพสินค้าทั้งสองแห่ง

วิธีทำ จากโจทย์

$$n_1 = 32 \qquad n_2 = 30$$

$$\bar{x}_1 = 6 \qquad \bar{x}_2 = 3.5$$

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 5$$

$$\alpha = 0.10$$

จากข้อมูล จึงใช้กรณีที่ 2 ในการประมาณค่า และจากการเปิดตาราง ได้ค่า $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$(6-3.5)-1.645\sqrt{\frac{1^2}{32}+\frac{5^2}{30}} < \mu_1-\mu_2 < (6-3.5)+1.645\sqrt{\frac{1^2}{32}+\frac{5^2}{30}}$$

$$2.5 - 1.645\sqrt{0.03+0.83} < u < 2.5 + 1.645\sqrt{\frac{1}{32}+\frac{25}{30}}$$

$$2.5 - 1.645\sqrt{0.86} < u < 2.5 + 1.645\sqrt{0.86}$$

$$2.5 - 1.645\,(0.93) < u < 2.5 + 1.645\,(0.93)$$

$$2.5-1.53 < \mu_1-\mu_2 < 2.5+1.53$$

$$0.97 < \mu_1-\mu_2 < 4.03$$

ดังนั้น ร้านค้าในห้างสรรพสินค้าทั้งสองจะมีรายได้เฉลี่ยต่างกันประมาณเดือนละ 0.97 ล้านบาท ถึง 4.03 ล้านบาท ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

ตัวอย่าง 4.20 เครื่องจักรชนิดที่ 1 กำหนดให้ n = 25 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 5 $Z\infty/2=$1.78

X 1 = *2000.1725* = 80.0068 = 80

X2 = *2007.3236* = 75

เครื่องจักรชนิดที่ 2 กำหนดให้ n = 36 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 3 $Z\infty/2=$1.78

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$(80\text{-}75)\ \text{-}1.78\sqrt{\frac{5^2}{25}+\frac{3^2}{36}} < u < (80\text{-}75)\ +1.78\sqrt{\frac{5^2}{25}+\frac{3^2}{36}}$$

$$5\ \text{-}1.78\sqrt{1+0.25} < u < 5+1.78\sqrt{1+0.25}$$

$$5\ \text{-}1.78\ (\ 1.12) < u < 2.5+1.78\ (1.12\ )$$

$$5\ \text{-}1.99 < u1\text{-}\ u2 < 5\ +1.99$$

$$3.01 < u1 - u2 < 6.99$$

$$3 < u1\text{-}\ u2 < 6.99$$

เครื่องจักรทั้งสองจะมีค่าเฉลี่ยต่างกันประมาณ 3.00 มิลลิเมตรถึง 6.99 มิลลิเมตร ที่ระดับความเชื่อมั่น 94%

ตัวอย่างที่ 5.4 จำนวนจุดตำหนิของสินค้าที่เครื่องจักรผลิตได้ในโรงงานทั้งสองเครื่องมีการแจกแจงแบบปกติ โดยเครื่องที่ 1 มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.05 จุด และเครื่องที่สอง มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.1 จุด ทำการสุ่มเลือกสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักรเครื่องที่ 1 มา 100 ชิ้น แล้วตรวจสอบพบว่ามีจุดตำนิเฉลี่ย 0.8 จุด และสุ่มเลือกสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องที่ 2 จำนวน 200 ชิ้น พบว่ามีจุดตำหนิเฉลี่ย 0.5 จุด จงประมาณช่วงความเชื่อมั่น 99% ของผลต่างของจำนวนจุดตำหนิเฉลี่ยของสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักรทั้งสอง

วิธีทำ จากโจทย์

$$\sigma_1 = 0.05 \qquad \sigma_2 = 0.1$$

$$n_1 = 100 \qquad n_2 = 200$$

$$\bar{x}_1 = 0.8 \qquad \bar{x}_2 = 0.5$$

$$\alpha = 0.01$$

จากข้อมูล จึงใช้กรณีที่ 1 ในการประมาณค่า และจากการเปิดตาราง ได้ค่า $Z_{\infty/2}$ = 2.58

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$(0.8-0.5)-2.576\sqrt{\frac{(0.05)^2}{100}+\frac{(0.1)^2}{200}} < \mu_1-\mu_2 < (0.8-0.5)+2.576\sqrt{\frac{(0.05)^2}{100}+\frac{(0.1)^2}{200}}$$

$$0.3-0.02 < \mu_1-\mu_2 < 0.3+0.02$$

$$0.28 < \mu_1-\mu_2 < 0.32$$

ดังนั้นจำนวนจุดตำหนิเฉลี่ยของสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักรทั้งสอง ต่างกันประมาณ 0.28 ถึง 0.32 จุด *ที่*ระดับความเชื่อมั่น 99%

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากร 1 กลุ่ม

ในกรณีที่สุ่มตัวอย่างจำนวน n สิ่ง จากประชากรจำนวน N

ให้ x แทนจำนวนตัวอย่างที่สนใจ

$\hat{p}$ แทนสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่างที่สนใจ

$\hat{q}$ แทนสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่างที่ไม่สนใจ

ซึ่ง $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$ และ $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

ดังนั้น การประมาณช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ P คือ

$$\boxed{\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < P < \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

ตัวอย่างที่ 5.5 จากตัวอย่างสุ่มแก้วน้ำเซรามิกที่ผลิตโดยโรงงานแห่งหนึ่งจำนวน 500 ร้อยใบ พบว่ามีแก้วที่ไม่สามารถพิจารณาให้เป็นสินค้าเกรด A จำนวน152ใบ จงหาช่วงความเชื่อมั่น 90%สัดส่วนของแก้วน้ำเซรามิกที่ไม่ใช่เกรด ของโรงงานแห่งนี้

วิธีทำ ให้ $\hat{p}$ แทน สัดส่วนของคนที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A

$\hat{q}$ แทน สัดส่วนของคนที่ไม่ได้ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A

จะได้

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{152}{500} = 0.304$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0.304 = 0.696$$

ที่ $\alpha = 0.05$ เปิดตาราง Z ได้ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

แทนค่าสูตร ตัวอย่าง 5.5 (จาก ต.ย.4.19)

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < P < \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$0.304 - 1.645\sqrt{\frac{0.304 \times 0.696}{500}} < P < 0.304 + 1.645\sqrt{\frac{0.304 \times 0.696}{500}}$$

$$0.304 - 0.034 < P < 0.304 + 0.034$$

$$0.27 < P < 0.338$$

ดังนั้นสัดส่วนของแก้วน้ำเซรามิกที่ผลิตโดยโรงงานเหล่านี้มีสัดส่วนการผลิตที่แท้จริงที่ไม่ใช่เกรดA มีประมาณ 0.27 ถึง 0.338 หรือประมาณ ร้อยละ 22 ถึงร้อยละ 33.8 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

แทนค่าในสูตร <u>ตัวอย่างที่ 5.6 (เอกสารคือ 4.19)</u> เมื่อ n = 450 $Z_{\infty/2}$ =1.96

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < P < \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$\dot{P} = \frac{x}{n} = \frac{200}{450} = 0.44$ ดังนั้น $\dot{q} = 1 - 0.44 = 0.56$

$$0.44 - 1.96\sqrt{\frac{(0.44)(0.56)}{450}} < p < 4.00 + 1.96\sqrt{\frac{(0.44)(0.56)}{450}}$$

$$0.44 - 1.96\sqrt{.0005}$$

$$0.44 - 0.43 < p < 0.44 + 0.43$$

$$0.01 < p < 0.87$$

ดังนั้นสัดส่วนของแก้วเซรามิกที่ไม่ใช่เกรด A มีประมาณ 0.01 ถึง 0.87 หรือประมาณ ร้อยละ 1 ถึงร้อยละ 87 ที่ระดับความเชื่อมั่น

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนประชากร 2 กลุ่ม

ให้ $\hat{p}_1$ แทน สัดส่วนของตัวอย่างที่สนใจกลุ่มที่ 1

$\hat{p}_2$ แทน สัดส่วนของตัวอย่างที่สนใจกลุ่มที่ 2

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

$$\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 \qquad \hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2$$

ดังนั้น การประมาณช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ $P_1 - P_2$ คือ

$$\boxed{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} < P_1-P_2 < (\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จากการสุ่มตัวอย่างคนเชียงใหม่ ผู้ชาย 400 คน และผู้หญิง 500 คน พบว่า ชอบดูรายการข่าวการเมือง จำนวน 348 คน และ 280 คน จงประมาณช่วงความเชื่อมั่น 99% ผลต่างของสัดส่วนระหว่างผู้ชายกับผู้หญิงที่ชอบดูข่าวการเมือง

วิธีทำ ให้ $\hat{p}_1$ แทน สัดส่วนของผู้ชายที่ชอบดูข่าวการเมือง

$\hat{p}_2$ แทน สัดส่วนของผู้หญิงที่ชอบดูข่าวการเมือง

จะได้

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{348}{400} = 0.87$$

$$\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 = 1 - 0.87 = 0.13$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{280}{500} = 0.56$$

$$\hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2 = 1 - 0.56 = 0.44$$

ที่ $\alpha = 0.01$ เปิดตาราง Z ได้ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576$

แทนค่าในสูตร

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

$$(0.87 - 0.56) - 2.576\sqrt{\frac{(0.87 \times 0.13)}{400} + \frac{(0.56 \times 0.44)}{500}} < P_1 - P_2 < (0.87 - 0.56) + 2.576\sqrt{\frac{(0.87 \times 0.13)}{400} + \frac{(0.56 \times 0.44)}{500}}$$

$$0.31 - 0.07 < P_1 - P_2 < 0.31 + 0.07$$

$$0.24 < P_1 - P_2 < 0.38$$

ดังนั้นสัดส่วนของผู้ชายและผู้หญิงที่ชอบดูรายการนี้ต่างกันประมาณ 0.24 ถึง 0.38 หรือ คิดเป็นร้อยละ 24 ถึง ร้อยละ 38 ที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

$$(0.87-0.56)-2.576\sqrt{\frac{(0.87\times 0.13)}{400}+\frac{(0.56\times 0.44)}{500}} < P_1-P_2 < (0.87-0.56)+2.576\sqrt{\frac{(0.87\times 0.13)}{400}+\frac{(0.56\times 0.44)}{500}}$$

$$\sqrt{\frac{0.1131}{400}}+\sqrt{\frac{0.2464}{500}}$$

$$\sqrt{0.0003}+\sqrt{.0005}$$

$$\sqrt{0.0008} = 0.028$$

$$(0.87- 0.56) - 2.58\,(0.028)$$

$$0.31- 0.07 < p_1 - p_2 < 0.31 + 0.07$$

$$0.24 < p_1 - p_2 < 0.38$$

<u>ตอบ</u> สัดส่วนของผู้ชายและผู้หญิงที่ชอบดูรายการนี้ต่างกันประมาณ 0.24 ถึง 0.38

หรือคิดเป็นร้อยละ 24 ถึง ร้อยละ 38 ที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

END