บทที่ 5

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง
(Linear Programming)

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นเทคนิคซึ่งฝ่ายจัดการสามารถนำไปช่วยการตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากร เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดกับองค์กรตามเป้าหมายที่กำหนดไว้แน่นอน ซึ่งอาจเป็นเป้าหมายที่มีค่าสูงสุด เช่น กำไร ผลผลิต หรืออาจเป็นเป็นเป้าหมายที่มีค่าต่ำสุด เช่น ต้นทุน ค่าใช้จ่าย เวลาที่ใช้ทำงาน หรือปริมาณขนส่งต่อครั้ง เป็นต้น

การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเกิดขึ้นเป็นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ.1920 จากการคิดค้นของนักเศรษฐศาสตร์ชื่อ W.W. Leontief เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยการผลิตกับผลผลิต (Input - Output) ต่อมา ค.ศ.1941 Hitchcock นำไปใช้แก้ปัญหาการขนส่ง ปี ค.ศ.1945 George Stigler นำตัวแบบไปใช้แก้ปัญหาด้านโภชนาการ เพื่อกำหนดปริมาณอาหารให้มีจำนวนสารอาหารที่มีคุณค่าตามที่ร่างกายต้องการ ในช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 กองทัพอากาศสหรัฐอเมริกาได้ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเพื่อวางแผนการขนส่ง ปี ค.ศ.1947 George Dantzig ได้คิดค้นวิธี**ซิมเพล็กซ์** (Simplex) เพื่อนำไปใช้หาคำตอบจากปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Thierauf and Klekamp, 1975; 47) ทำให้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการยอมรับ และนำไปใช้กันอย่างแพร่หลาย ในวงการธุรกิจปัจจุบัน เพราะวิธีซิมเพล็กซ์สามารถหาคำตอบได้อย่างรวดเร็ว มีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ และช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาได้อย่างกว้างขวาง

ตัวอย่างของปัญหาธุรกิจที่อาจใช้เทคโปรแกรมเชิงเส้นตรงช่วยตัดสินใจ ได้แก่

1. *ธนาคาร* ต้องการตัดสินใจใช้เงินทุนที่มีอยู่เพื่อให้ได้ผลตอบแทนสูงสุด โดยที่จะต้องดำรงสภาพคล่องตามกฎระเบียบที่กำหนดไว้ และมีเงินสำรองเพียงพอสำหรับลูกค้าที่จะมาขอกู้

2. *บริษัทโฆษณา* ต้องการให้การโฆษณาสินค้าถึงลูกค้ามากที่สุด ด้วยต้นทุนค่าใช้จ่ายต่ำสุด.

3. *บริษัทผลิตสินค้า* ต้องการให้ได้กำไรสูงสุด หรือผลิตสินค้าให้ได้จำนวนมากที่สุดจากทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

4. *นักโภชนาการ* ต้องการผสมอาหารให้ได้คุณค่าทางโภชนาการครบถ้วน โดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

จากตัวอย่าง แต่ละองค์กรพยายามที่จะให้การดำเนินการเป็นไปตามเป้าหมาย เช่น อัตราผลตอบแทนสูงสุด หรือต้นทุนต่ำสุด จากการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดนั้น

ลักษณะตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเพื่อช่วยการตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด คำว่า **"Linear"** หรือ **"เส้นตรง"** อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ ซึ่งสัมพันธ์กันในลักษณะเป็นสัดส่วนกันโดยตรง เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างชั่วโมงทำงานกับผลผลิต ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงชั่วโมงทำงาน 10% มีผลทำให้ผลผลิตเปลี่ยนแปลงไป 10% เช่นเดียวกัน ส่วนคำว่า **"Programming"** หรือ **"การโปรแกรม"** เป็นวิธีการหรือขั้นตอนการคำนวณ เพื่อหาผลลัพธ์หรือคำเฉลยที่ดีที่สุดจากข้อจำกัดของทรัพยากร

ส่วนประกอบของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรง คือ

1. **สมการเป้าหมาย** (Objective Function) เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ตามเป้าหมายการดำเนินงานที่กำหนดไว้ เช่น กำไรสูงสุด หรือต้นทุนต่ำสุด

2. **สมการแสดงข้อจำกัดของปัจจัยหรือทรัพยากร** (Constraint) ซึ่งอาจแสดงในรูปสมการหรืออสมการ กำหนดขอบเขตการใช้ทรัพยากร มากกว่า น้อยกว่า หรือเท่ากับที่กำหนดไว้

3. **ตัวแปรทุกตัวจะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์**

รูปแบบโดยทั่วไปของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะเป็นดังนี้

สมการเป้าหมาย

$$\text{Max. } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

สมการหรือสมการข้อจำกัด

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1n}X_n \leqslant b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots + a_{2n}X_n \leqslant b_2$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots + a_{mn}X_n \leqslant b_n$$
$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geqslant 0$$

ถ้าให้ X_j คือ ตัวแปรที่ใช้ในการตัดสินใจ

C_j คือ กำไรต่อหน่วยหรือต้นทุนต่อหน่วย

a_{ij} คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรหรืออัตราการใช้ทรัพยากรในการผลิต X_j หนึ่งหน่วย

b_j คือ จำนวนทรัพยากรทั้งหมดที่มีอยู่

ขั้นตอนการดำเนินการของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

เพื่อให้เข้าใจลักษณะปัญหา และใช้เทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้น เพื่อแก้ปัญหาต่างๆ อาจสรุปขั้นตอนการดำเนินงาน ดังนี้

1. **กำหนดตัวแบบแทนระบบของปัญหา** (Model Formulation)

ก่อนอื่นจะต้องศึกษาข้อมูลองค์ประกอบของปัญหาให้เข้าใจ กำหนดตัวแปรที่เป็นส่วนประกอบของปัญหานั้นๆ ให้ถูกต้อง จนสามารถกำหนดสมการเป้าหมายและสมการข้อจำกัด ให้มีความสัมพันธ์กันในลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้นตรงได้

2. **หาผลลัพธ์ หรือคำเฉลยที่ดีที่สุดจากตัวแบบที่กำหนดขึ้นแทนระบบปัญหานั้น**

เมื่อสามารถสร้างตัวแบบแทนระบบปัญหาในลักษณะการโปรแกรมเชิงเส้นตรงแล้ว สามารถหาผลลัพธ์หรือคำเฉลย ด้วยวิธีการต่างๆ ดังนี้

ก. กรณีปัญหามีตัวแปรเพียง 2 ตัว อาจใช้วิธีกราฟ (Graphic Method)

ข. กรณีปัญหาที่มีตัวแปรเกินกว่า 2 ตัว ใช้วิธี Simplex Method

การหาผลลัพธ์โดยวิธีกราฟ

การหาผลลัพธ์โดยวิธีกราฟ สามารถทำได้ กรณีที่ปัญหามีตัวแปรเพียง 2 ตัว หรืออย่างมากที่สุดไม่เกิน 3 ตัว มีวิธีการ คือ

1. ลากเส้นฟังก์ชั่นสมการเป้าหมาย
2. ทดสอบจุดยอดของพื้นที่ที่เป็นไปได้

ก. กรณีการหาค่าสูงสุด

ตัวอย่างที่ 5.1 กิจการแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด คือสินค้า A และ B สินค้าทั้งสองชนิดผลิตโดยใช้เครื่องจักร 2 เครื่อง การผลิตสินค้า A 1 หน่วย ใช้เวลาจากเครื่องจักรที่หนึ่ง 2 ชั่วโมงและเครื่องจักรที่สอง 1 ชั่วโมง ขณะที่การผลิตสินค้า B 1 หน่วย ใช้เวลาจากเครื่องจักรที่หนึ่งและที่สองอย่างละ 1 ชั่วโมง เครื่องจักรที่หนึ่งสามารถเดินเครื่องได้ไม่เกินวันละ 10 ชั่วโมง ขณะที่เครื่องจักรที่สองเดินเครื่องได้ไม่เกินวันละ 6 ชั่วโมง สินค้า A ขายได้กำไรชิ้นละ 15 บาท และสินค้า B ได้กำไรชิ้นละ 10 บาท

โรงงานควรจะผลิตสินค้าแต่ละชนิดจำนวนเท่าใด จึงจะได้กำไรสูงสุด

จากข้อมูลปัญหาสรุปได้ดังนี้

	สินค้า A (จำนวนชั่วโมงที่ผลิตต่อหน่วย)	สินค้า B (จำนวนชั่วโมงที่ผลิตต่อหน่วย)	เวลาที่เครื่องจักรทำงาน (ชั่วโมง)
เครื่องจักรที่หนึ่ง	2	1	10
เครื่องจักรที่สอง	1	1	6
กำไร	15	10	

แต่ถ้ามีข้อสมมุติต่อไปอีกว่า เนื่องจากปัญหาด้านสภาพคล่อง โรงงานจะผลิตสินค้า A ได้ไม่เกิน 4.5 หน่วย และสินค้า B ไม่เกินวันละ 4 หน่วย

จากวัตถุประสงค์และข้อจำกัดของกิจการ สามารถนำไปสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง เพื่อหาผลลัพธ์โดยวิธีกราฟ ดังนี้

ให้ X_1 คือ จำนวนสินค้า A ที่จะผลิต

X_2 คือ จำนวนสินค้า B ที่จะผลิต

สมการเป้าหมาย คือกำไรสูงสุด

$$\text{Max. } P = 15X_1 + 10X_2 \quad \text{.......(1)}$$

โดยมีสมการ (อสมการ) ข้อจำกัดคือ

$$2X_1 + X_2 \leqslant 10 \quad \text{.......(2)}$$

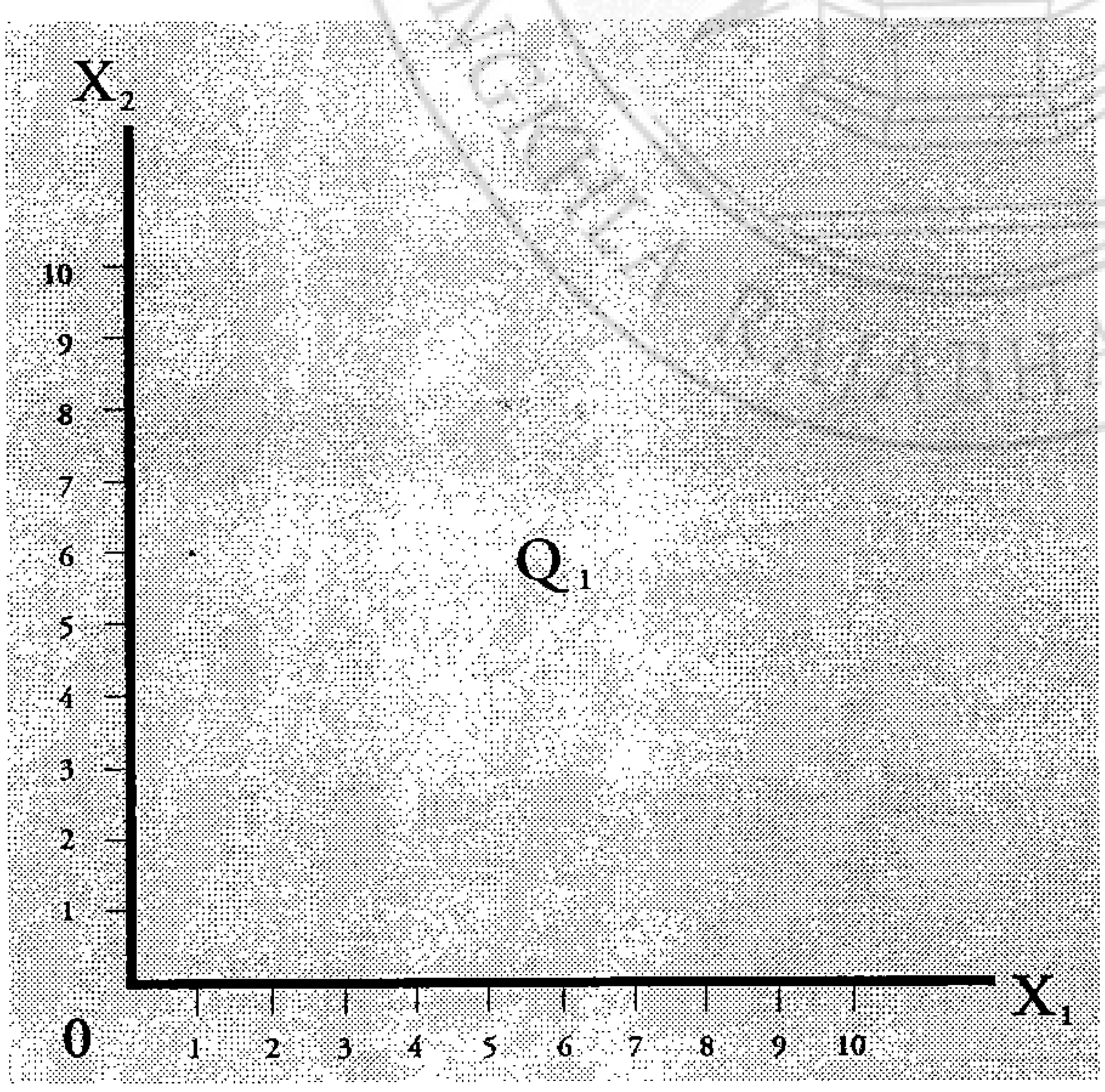
$$X_1 + X_2 \leqslant 6 \quad \text{.......(3)}$$

$$X_1 \leqslant 4.5 \quad \text{.......(4)}$$

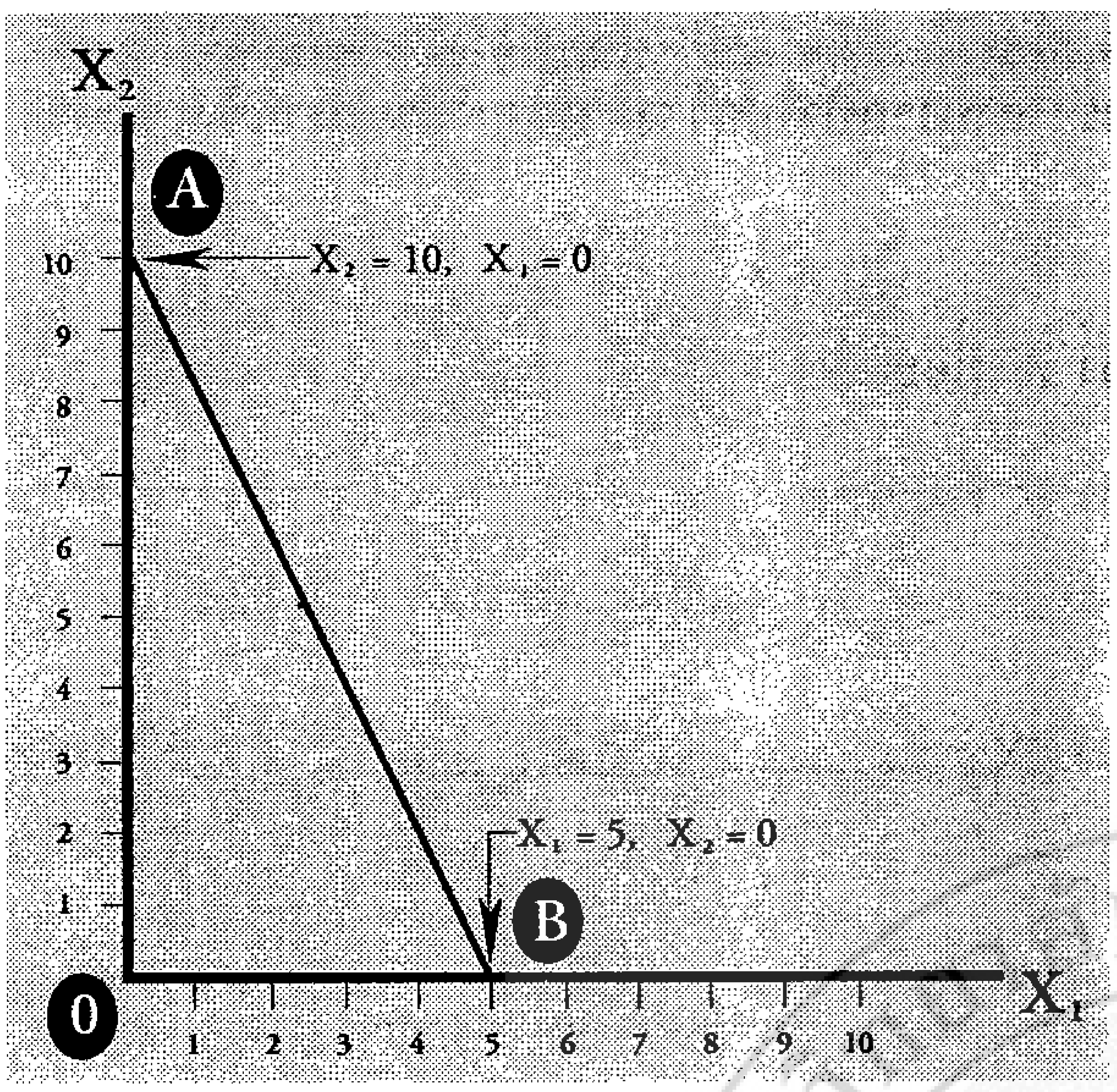
$$X_2 \leqslant 4 \quad \text{.......(5)}$$

และ $X_1, X_2 \geqslant 0$ ....(6)

จากนั้นใช้วิธีกราฟเพื่อหาพื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้ จากข้อจำกัดที่มีอยู่ตามอสมการที่ (2) ถึง (6) ซึ่ง X_1 และ X_2 จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0



พื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้ตามข้อจำกัดที่ (6) คือ $X_1 > 0$ และ $X_2 > 0$ ซึ่งเป็นพื้นที่ทั้งหมดใน Quadrant ที่ 1



พื้นที่ที่เป็นไปได้ตามข้อจำกัด (2)

$$2X_1 + X_2 \leqslant 10$$

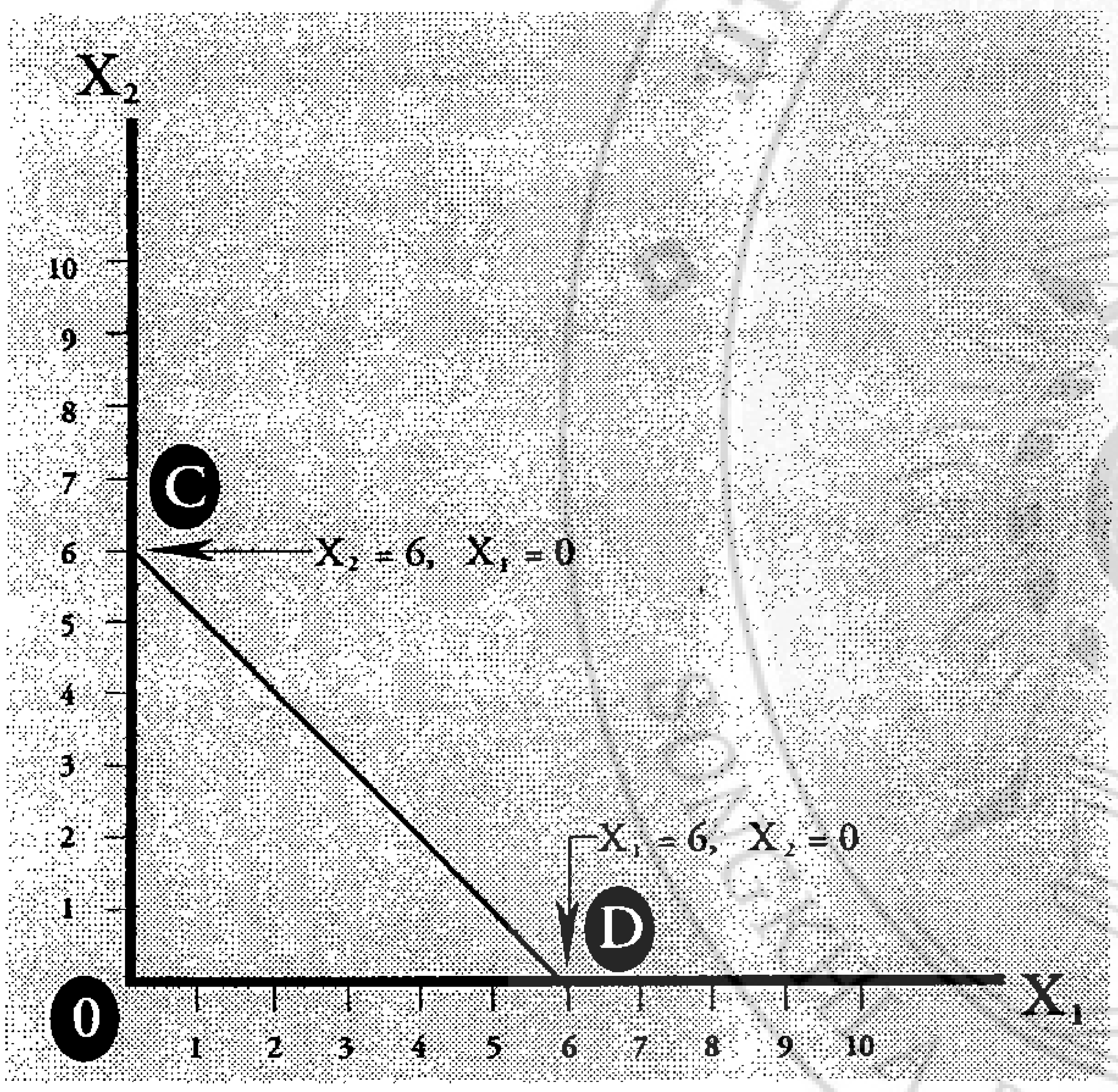
คือพื้นที่ 0AB

ณ จุด A, $X_2 = 10$ และ $X_1 = 0$

B, $X_1 = 5$ และ $X_2 = 0$

ณ จุดใดๆ บนเส้น AB จะแสดงจำนวนการผลิต X_1 และ X_2 ที่เป็นไปตามสมการ

$$2X_1 + X_2 = 10$$



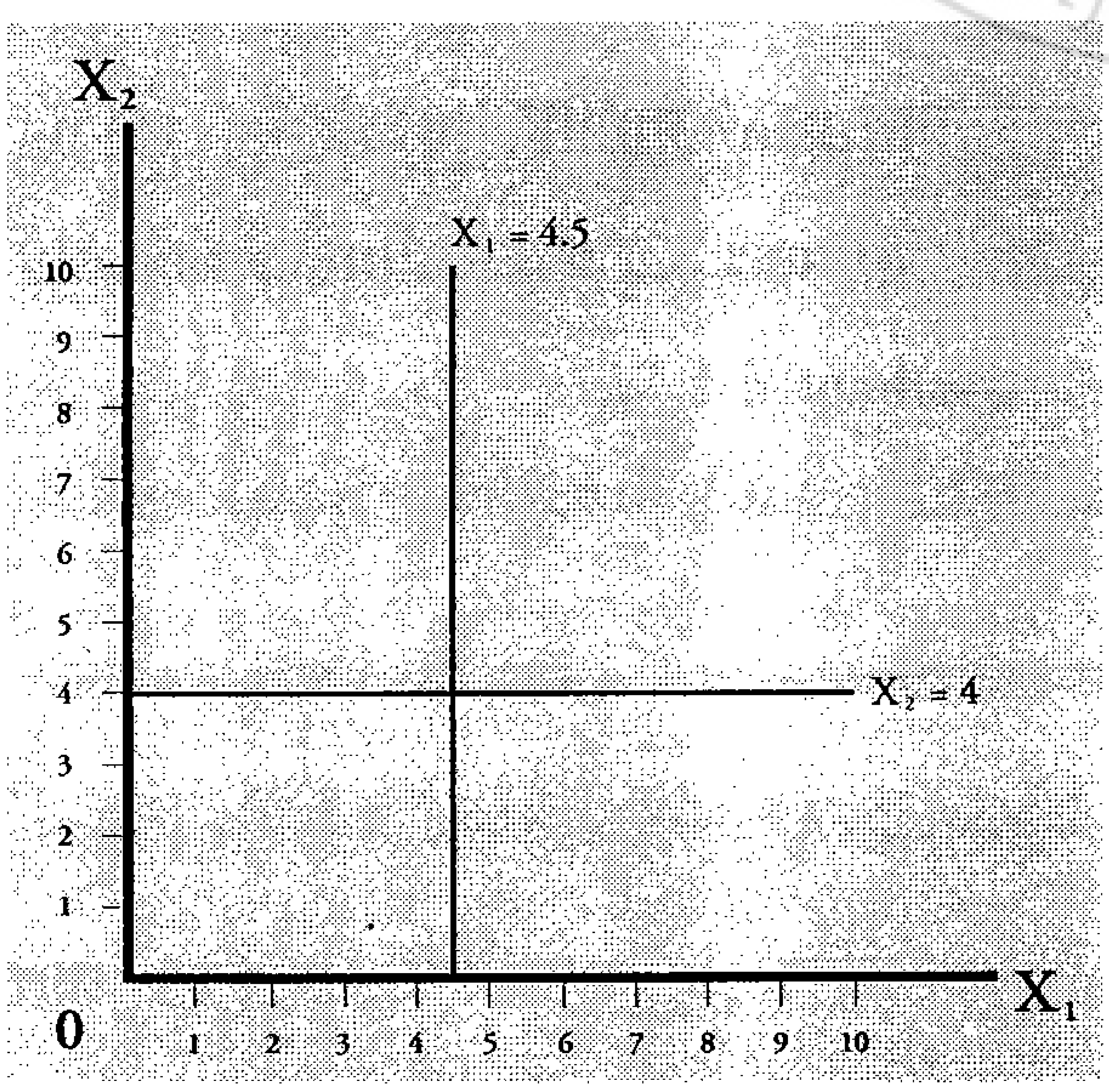
พื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้ตามข้อจำกัด (3)

$$X_1 + X_2 = 10$$

0CD คือพื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้

ณ จุดใดๆ บนเส้น CD คือจำนวนการผลิต X_1 และ X_2 ซึ่งเป็นไปตามสมการ

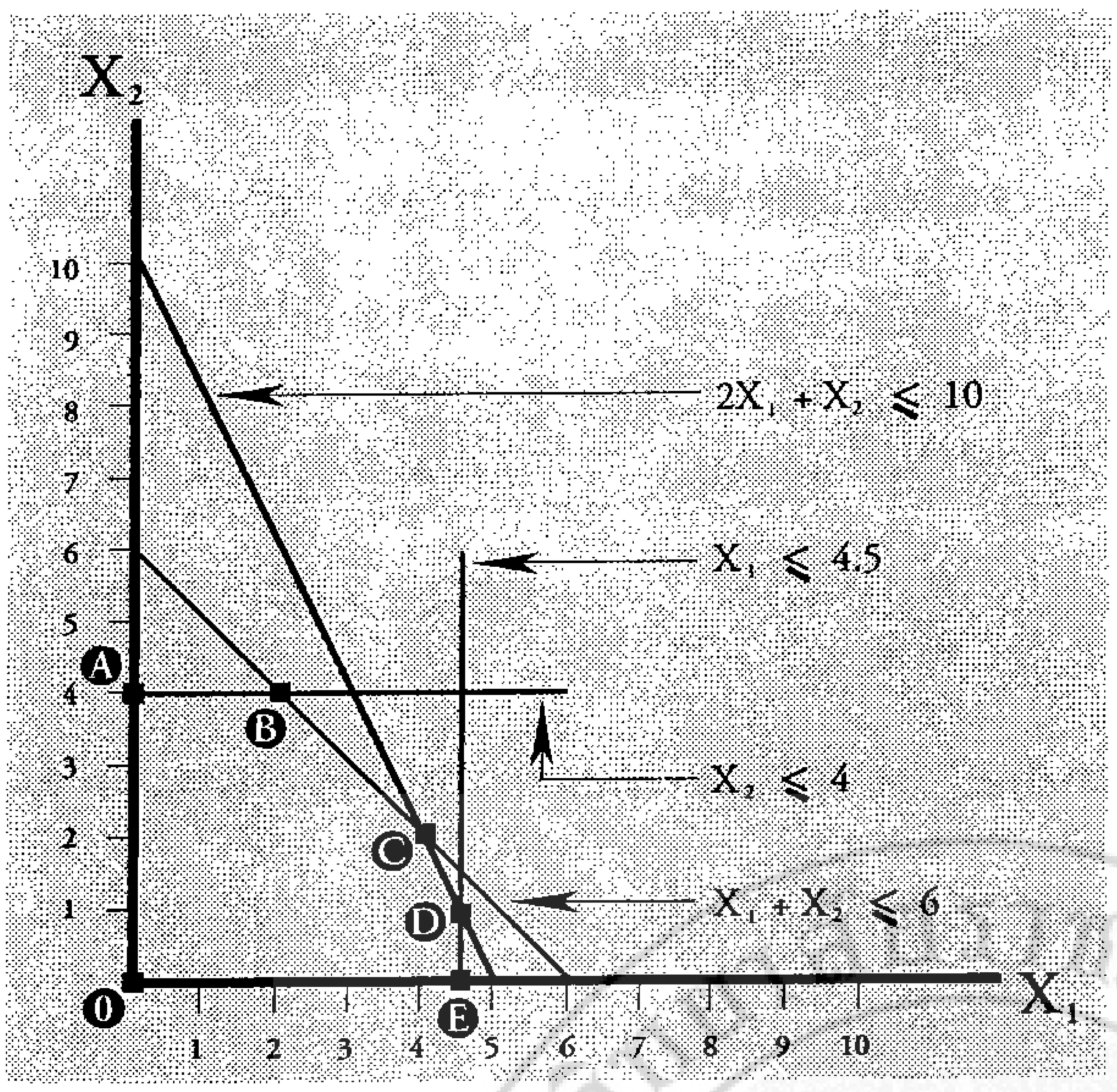
$$X_1 + X_2 = 6$$



พื้นที่ที่เป็นไปได้ตามข้อจำกัด (4) และ (5) คือ

$$X_1 \leqslant 4.5$$

$$X_2 \leqslant 4$$



พื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้ตามเงื่อนไขของสมการข้อจำกัดทุกๆ สมการ คือพื้นที่ 0ABCDE จากนั้นจึงทดสอบค่า X_1 และ X_2 ณ จุดยอดต่างๆ เพื่อหาค่าสมการเป้าหมายที่ดีที่สุด

จากกราฟ พื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้ตามเงื่อนไขข้อจำกัดต่างๆ คือ พื้นที่ 0ABCDE จากนั้นจึงวิเคราะห์หาคำตอบที่ดีที่สุดภายในพื้นที่ 0ABCDE คือ

ณ จุด	ค่า X_1, X_2	กำไร (บาท)
0	(0, 0)	0
A	(0, 4)	40
B	(2, 4)	70
C	(4, 2)	80
D	(4.5, 1)	77.50
E	(4.5, 0)	67.50

ค่า X_1, X_2 ที่ดีที่สุดตามสมการเป้าหมาย คือ เมื่อ $X_1 = 4$ และ $X_2 = 2$

ข. กรณีหาค่าต่ำสุด

กรณีสมการเป้าหมายของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นปัญหาต้นทุนต่ำสุด เทคนิคการหาคำเฉลยโดยวิธีกราฟ เหมือนกับเป้าหมายการหากำไรสูงสุด มีข้อแตกต่างเพียงข้อสุดท้ายของการเลือกค่าคำเฉลยที่ดีที่สุด คือแทนที่จะเลือกจุดยอดที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าสูงสุด แต่จะเลือกจุดที่ต่ำที่สุดของพื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้

ตัวอย่างที่ 5.2 ฟาร์มเลี้ยงไก่แห่งหนึ่ง ต้องการผสมอาหารสัตว์เอง โดยมีเป้าหมายคือต้นทุนต่ำสุด และมีธาตุอาหารครบถ้วนตามสูตรที่ต้องการ หลังจากทำการวิจัยพบว่า ในอาหารสัตว์สำเร็จรูป 1 กิโลกรัม จะต้องประกอบด้วยโปรตีนอย่างน้อย 4 หน่วย ไขมันอย่างน้อย 6 หน่วย และเส้นใยอย่างน้อย 14 หน่วย ในข้าวโพดป่น 1 กิโลกรัมประกอบด้วยโปรตีน 1 หน่วย ไขมัน 1 หน่วยและเส้นใย 7 หน่วย ส่วนปลาป่น 1 กิโลกรัมประกอบด้วยโปรตีน 1 หน่วยและไขมัน 3 หน่วย ถ้าต้นทุนในการซื้อข้าวโพดกิโลกรัมละ 3 บาท และปลาป่นกิโลกรัมละ 5 บาท ควรจะใช้ส่วนผสมอย่างไรจึงจะเสียต้นทุนน้อยที่สุด และให้ธาตุอาหารครบถ้วนตามที่กำหนดไว้

จากข้อมูลที่มีอยู่ สามารถนำปัญหาไปสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงได้ ดังนี้

ให้ X_1 คือ ปริมาณข้าวโพดป่นที่ใช้

X_2 คือ ปริมาณปลาป่นที่ใช้

สมการเป้าหมาย คือต้องการส่วนผสมที่ทำให้ต้นทุนต่ำสุด

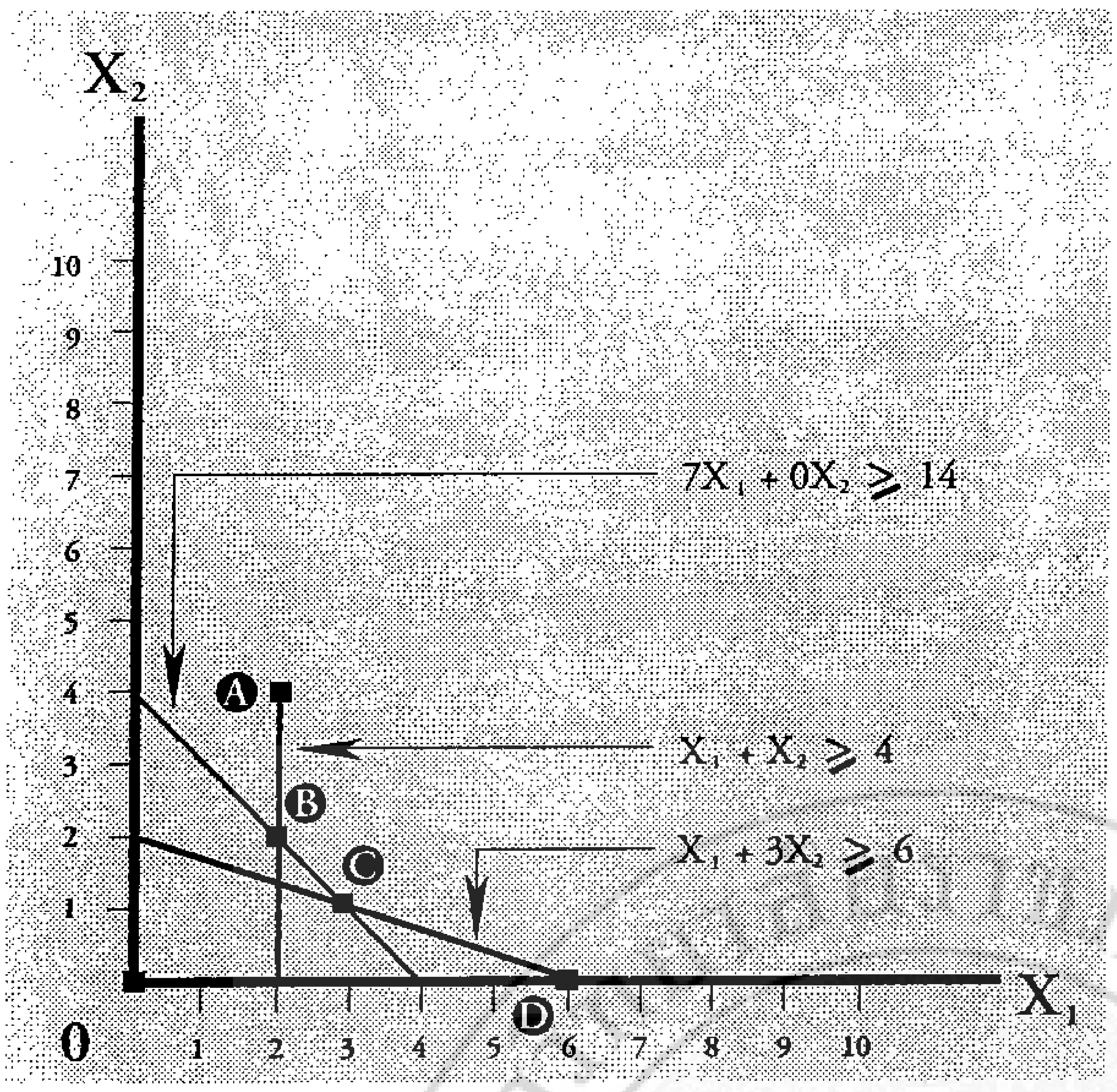
$$\text{Min. } C = 3X_1 + 5X_2$$

โดยมีข้อจำกัด คือ ธาตุอาหาร

1. โปรตีน $X_1 + X_2 \geq 4$
2. ไขมัน $X_1 + 3X_2 \geq 6$
3. เส้นใย $7X_1 + 0X_2 \geq 14$

และ $X_1 , X_2 \geq 0$

นำสมการเป้าหมายและข้อจำกัดไปสร้างกราฟเพื่อหาพื้นที่การผลิตที่เป็นไปได้



ระดับการผลิตที่เป็นไปได้จะอยู่ทางขวามือของเส้นแสดงข้อจำกัดแต่ละเส้น คือ บริเวณตั้งแต่จุด ABCD ขึ้นไปทางขวามือ จากนั้น จึงทดสอบหาค่า X_1 และ X_2 จากจุด A, B, C และ D เพื่อหาค่าสมการเป้าหมายต่ำสุด

คำเฉลยที่ดีที่สุดของพื้นที่เหนือจุด ABCD ไปทางขวามือ คือ

ณ จุด	ค่า X_1, X_2	ต้นทุน (บาท)
A	(2, 4)	26
B	(2, 2)	16
C	(3, 1)	14
D	(6, 0)	18

ส่วนผสมที่เสียต้นทุนต่ำสุดตามสมการเป้าหมาย คือ ใช้ข้าวโพดป่น 3 กิโลกรัมและปลาป่น 1 กิโลกรัม ต้นทุนต่ำที่สุดคือ 14 บาท

การหาผลลัพธ์โดยวิธี Simplex

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง อาจพบในลักษณะที่ซับซ้อน มีตัวแปรจำนวนมากเกินกว่าที่จะแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ สำหรับปัญหาที่มีตัวแปรขนาดใหญ่และซับซ้อนอาจใช้เทคนิคที่เรียกว่า **ซิมเพล็กซ์** (Simplex Method) มาใช้ วิธีการคำนวณแบบ Simplex เป็น**วิธีการคำนวณแบบย้อนซ้ำ** (Iterative Process) คือคำนวณซ้ำแล้วซ้ำอีกเพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุด

ก. การคำนวณเพื่อหาค่าสูงสุด

ตัวอย่างที่ 5.3 ตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

$$\text{Max. กำไร} = 8T + 6C$$

โดยมีเงื่อนไข

$$4T + 2C \leqslant 60$$

$$2T + 4C \leqslant 48$$

$$T, C \text{ มีค่า} \geqslant 0$$

ขั้นตอนที่ 1

การแก้ปัญหาโดยวิธี Simplex ขั้นแรกจะต้องเปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการ ด้วยการเพิ่มตัวแปร (Slack Variable) เข้าไปในทุกสมการ สำหรับตัวแปรที่ไม่มีผลทำให้ค่าของสมการเปลี่ยนแปลง ให้มีค่าสัมประสิทธิ์เป็น 0 เช่น เพิ่ม $0S_2$ ในสมการแรก และ $0S_1$ ในสมการที่ 2 จากตัวอย่างจะได้สมการ ดังนี้

$$\text{กำไร} = 8T + 6C + 0S_1 + 0S_2$$

$$60 = 4T + 2C + S_1 + 0S_2$$

$$48 = 2T + 4C + 0S_1 + S_2$$

และนำเสนอในรูปตาราง ดังตัวอย่าง

ตารางที่ 5.1 การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเพื่อแก้ปัญหาโดยวิธี Simplex

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8	6	0	0
			T	C	S_1	S_2
0	S_1	60	4	2	1	0
0	S_2	48	2	4	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		8	6	0	0

คำอธิบายตาราง

แถวตั้ง C_j แสดงกำไรต่อหน่วยของตัวแปรที่เพิ่มเข้าไปคือ $S_1 = 0$, $S_2 = 0$

แถวตั้งที่ 2 แสดงส่วนผสมผลิตภัณฑ์

แถวตั้งที่ 3 แสดงถึงข้อจำกัดซึ่งมีค่าคงที่

แถวตั้งที่ 4-7 เป็นแถวตั้งตัวแปร ซึ่งแต่ละแถวจะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า

แถวนอนที่ 1 แสดงสัมประสิทธิ์ของสมการกำไร

แถวนอนที่ 2 แสดงสัมประสิทธิ์ของสมการข้อจำกัดแรก

แถวนอนที่ 3 แสดงสัมประสิทธิ์ของข้อจำกัดที่ 2

แถวนอน Z_j แทนกำไรที่ได้รับจากคำเฉลย

$C_j - Z_j$ แทนกำไรสุทธิที่ได้จากการนำตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเพิ่มเข้าไปในตารางคำเฉลย 1 หน่วย

ตารางที่ 5.2 การหาคำเฉลยเบื้องต้น

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8	6	0	0
			T	C	S_1	S_2
0	S_1	60	4	2	1	0
0	S_2	48	2	4	0	1
	Z_j		0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		8	6	0	0

จากตาราง คำเฉลยเริ่มแรก คือ ถ้าไม่มีการผลิต ดังนั้น

$$T = 0$$

$$C = 0$$

$$S_1 = 60 - 4(0) - 2(0) = 60$$

$$S_2 = 48 - 2(0) - 4(0) = 48$$

ขั้นตอนที่ 2

พัฒนาตารางเริ่มแรกเพื่อหาคำเฉลยที่ดีต่อไป ดังนี้

ตารางที่ 5.3 ตารางเริ่มแรก

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8	6	0	0
			T	C	S_1	S_2
0	S_1	60	4	2	1	0
0	S_2	48	2	4	0	1
	Z_j		0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		8	6	0	0

คำเฉลยที่ดีที่สุด

ขั้นตอนที่ 3

พัฒนาเพื่อหาคำเฉลยขั้นต่อไป ดังนี้

1. พิจารณาว่าตัวแปรใดที่เพิ่มแล้วทำให้กำไรต่อหน่วยสูงสุด โดยให้ดูจากค่าบวกมากที่สุดในแถวนอน $C_j - Z_j$ ซึ่งจากตัวอย่างคือ แถวตั้ง T ค่า $C_j - Z_j$ สูงสุดคือ 8 ดังนั้นแถวตั้ง T จึงถูกเลือกไปใช้แทนที่

2. จะนำแถวตั้งไปแทนที่แถวนอนตัวแปรใดนั้น ให้พิจารณาโดย <u>หาร</u> แถวตั้งช่องปริมาณด้วยตัวเลขแถวตั้ง T คือ

$$S = \frac{60}{4} = 15$$

$$S = \frac{48}{2} = 24$$

และเลือกแถวที่ให้ค่าบวกต่ำสุด คือ 15 ซึ่งอยู่ในแถวนอน S_1 ดังนั้นแถวตั้ง T จึงไปแทนที่แถวนอน S_1

3. เมื่อได้แถวตั้งที่เป็นคำเฉลยเพื่อไปแทนที่แถวนอนแล้ว จึงพัฒนาคำเฉลยครั้งที่ 2 ต่อไป ด้วยการนำแถวตั้ง T ไปแทนที่แถวนอน S_1 ค่าแถวนอน T ที่นำไปแทนที่ คำนวณจากการหารแถวนอนที่ถูกแทนที่ (S_1) ด้วย element ที่ตัดกันของแถวตั้งกับแถวนอนที่จะนำไปแทนที่นั้น ซึ่งเรียกว่า **Pivot element** ซึ่งจากตัวอย่างคือ 4

$$\frac{60}{4} = 15, \qquad \frac{4}{4} = 1, \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{0}{4} = 0$$

4. คำนวณตัวแปรในแถวนอนที่เหลือ โดยใช้สูตร ดังนี้

element แถวนอนใหม่ = element แถวนอนเดิม - (Pivot element × element ของแถวนอนที่นำไปแทนที่)

จะได้ค่า element แถวนอน S_2 ใหม่ ดังนี้

$$18 = 48 - 2(15)$$

$$0 = 2 - 2(1)$$

$$3 = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = 0 - 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$1 = 1 - 2(0)$$

แล้วทดสอบค่า Z_j ใหม่

กำไรรวม	=	8(15) + 0(6)	=	120
กำไรจากการผลิต T	=	8(1) + 0(0)	=	8
C	=	$8\left(\frac{1}{2}\right) + 0(3)$	=	4
S_1	=	$8\left(\frac{1}{4}\right) + 0\left(-\frac{1}{2}\right)$	=	2
S_2	=	8(0) + 0(0)	=	0

จากตารางที่ 5.3 จะเห็นว่าการผลิต T 1 หน่วยจะให้กำไรสูงสุด

หลังจากแทนค่าแถวตั้ง T ในแถวนอน S_1 แล้ว จะได้ตารางที่ 5.4 เพื่อนำไปหาคำเฉลยต่อไป

ตารางที่ 5.4 ตารางผลลัพธ์จากการคำนวณรอบที่ 1

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8	6	0	0
			T	C	S_1	S_2
8	T	15	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	S_2	18	0	3	$\frac{-1}{2}$	1
	Z_j	120	8	4	2	0
	$C_j - Z_j$		0	2	-2	0

คำเฉลยที่ดีที่สุด

ขั้นตอนที่ 4 การพัฒนาตารางที่ 5.4 เพื่อหาคำเฉลยที่ดีที่สุด

เพื่อหาคำเฉลยที่ดีที่สุดขั้นต่อไป วิธีการคำนวณก็จะทำซ้ำตามวิธีในขั้นตอนที่ 3 คือพิจารณาแถวนอน $C_j - Z_j$ จะเห็นว่ายังมีค่าบวกในแถวตั้ง C คือ 2 ซึ่งแสดงว่าสามารถพัฒนาคำเฉลยได้อีก คือการผลิต C เพิ่มขึ้นจะทำให้กำไรเพิ่มขึ้นหน่วยละ 2 บาท ดังนั้นแถวตั้ง C จึงสามารถนำไปแทนที่แถวนอน T หรือ S_2 ในตารางที่ 5.4 ซึ่งการพิจารณาก็เช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 3 คือ

1. จะให้แถวตั้ง C ไปแทนแถวนอนใด พิจารณาจากการหารแถวตั้งปริมาณคงที่ด้วยแถวตั้งที่จะแทนนั้น คือ

$$\frac{15}{\frac{1}{2}} = 30$$

$$\frac{18}{3} = 6$$

แถวนอนที่ให้ผลลัพธ์ต่ำคือ แถวนอน S_2 ดังนั้น S_2 จึงเป็นแถวนอนที่ถูกแทนที่โดยแถวตั้ง C ต่อไป

2. ค่า element ที่จะนำไปแทนที่แถวนอนในตารางที่ 5.5 จะคำนวณโดยวิธีเดิม คือหาร แถวนอนที่ถูกแทนที่ ด้วย Pivot element

$$\frac{18}{3} = 6, \quad \frac{0}{3} = 0, \quad \frac{3}{3} = 1, \quad \frac{\frac{-1}{2}}{3} = \frac{-1}{6} \text{ และ } \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

3. หาค่าแถวนอนที่เหลือ (T) ในแถวนอนใหม่ตามสูตรที่ทำมาแล้วในขั้นตอนที่ 3 คือ

element แถวนอนใหม่ = element แถวนอนเดิม - (Pivot element × element ของแถวนอนที่นำไปแทนที่)

$$12 = 15 - \left(\frac{1}{2} \times 6\right)$$

$$1 = 1 - \left(\frac{1}{2} \times 0\right)$$

$$0 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times 1\right)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{-1}{6}\right)$$

$$\frac{-1}{6} = 0 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

และทดสอบค่า Z_j หรือกำไรใหม่

กำไรรวม $= 8(12) + 6(6) = 132$

กำไรการผลิต T $= 8(1) + 6(0) = 8$

$$C = 8(0) + 6(1) = 6$$

$$S_1 = 8\left(\frac{1}{3}\right) + 6\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{5}{3}$$

$$S_2 = 8\left(\frac{-1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

จะได้ตารางที่ 5.5 เพื่อพิจารณาหาคำเฉลยต่อไป

ตารางที่ 5.5 แสดงผลลัพธ์จากการคำนวณรอบที่ 2

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8	6	0	0
			T	C	S_1	S_2
8	T	12	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{6}$
6	C	6	0	1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	Z_j		8	6	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-2}{3}$

ผลลัพธ์จากการคำนวณรอบที่ 2 จะเห็นว่าไม่มีค่า $C_j - Z_j$ ใดมีค่าเป็นบวก แสดงว่ากำไรที่ได้รับจะไม่สามารถทำได้สูงกว่านี้ คำเฉลยที่ได้จึงเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุด คือ $T = 12$, $C = 6$, $S_1 = 0$ และ $S_2 = 0$ กำไรสูงสุดคือ 132 เมื่อผลิต $T = 12$ และ $C = 6$ ซึ่งอาจพิสูจน์ได้โดยการแทนค่าในสมการเริ่มแรก

$$\text{Max. } Z = 8(12) + 6(6) = 132$$

เงื่อนไข

$$4T + 2C \leqslant 60$$

$$4(12) + 2(6) \leqslant 60$$

$$48 + 12 \leqslant 60$$

และ

$$2T + 4C \leqslant 48$$

$$2(12) + 4(6) \leqslant 48$$

$$T, C \geqslant 0$$

ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข

ข. การคำนวณเพื่อหาค่าต่ำสุด

รูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาค่าต่ำสุดอาจพบในเรื่องของการผลิตเพื่อให้ต้นทุนต่ำที่สุด หรือการใช้ปัจจัยเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 5.4 บริษัทผลิตปุ๋ย ต้องการผสมปุ๋ยซึ่งประกอบด้วยธาตุ X_1 และ X_2 จำนวน 200 กก. ธาตุ X_1 มีต้นทุน กก.ละ 3 บาท และ X_2 ต้นทุน กก.ละ 8 บาท ปุ๋ยผสมนี้จะให้มีธาตุ X_1 ไม่เกิน 80 กก. และธาตุ X_2 ไม่ต่ำกว่า 60 กก. บริษัทควรผสมปุ๋ยอย่างไรจึงจะเสียต้นทุนต่ำที่สุด

อาจแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปของตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

สมการเป้าหมาย $\quad \text{Min. } C = 3X_1 + 8X_2$

ข้อกำหนด

$$X_1 + X_2 = 200$$
$$X_1 \leqslant 80$$
$$X_2 \geqslant 60$$
$$X_1,\ X_2 \geqslant 0$$

ขั้นตอนที่ 1

แปลงอสมการให้อยู่ในรูปของสมการ ด้วยการเพิ่มตัวแปรส่วนขาด (Slack Variable) สำหรับอสมการที่มีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leqslant$) และตัวแปรเทียม (Artificial Variable) สำหรับกรณีที่เป็นสมการอยู่แล้วหรืออสมการที่มีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geqslant$) แล้วจึงนำสมการนั้นมาจัดเข้าตาราง Simplex ดังนี้

สมการเป้าหมาย $\quad \text{Min. } C = 3X_1 + 8X_2$

ข้อกำหนด

$$X_1 + X_2 = 200 \quad \text{.......................(1)}$$
$$X_1 + S_1 = 80 \quad \text{.......................(2)}$$
$$X_2 - S_2 = 60 \quad \text{.......................(3)}$$

ทดสอบคำเฉลยที่เป็นไปได้จากข้อกำหนดต่าง ๆ

ข้อกำหนดที่ 1. ถ้าสมมุติ $X_1 = 0,\ X_2 = 200$ แสดงว่าเป็นไปได้ตามข้อกำหนดคือ $X_1 = 0$ และไม่เกิน 80 X_2 เกิน 60 แต่ไม่อาจทราบได้แน่นอนว่าจะเป็นระดับการผลิตที่ทำให้ต้นทุนต่ำสุดหรือไม่ เพื่อพัฒนาคำเฉลยต่อไป จึงกำหนดตัวแปรสมมุติ (Artificial Variable) คือ A_1 บวกเข้าไปในสมการ

$$X_1 + X_2 + A_1 = 200$$

ตัวแปร A_1 จึงเป็นส่วนผสมที่มีราคาแพงที่อาจนำมาใช้แทน X_1 และ X_2 แต่ไม่ใช้คำเฉลยที่เป็นเป้าหมายตามแนวคิดของโปรแกรมเชิงเส้นตรง A_1 จึงเป็นตัวแปรเทียมที่นำมาใช้เป็นเครื่องมือสำหรับการคำนวณ และจะปรากฏในสมการที่เป็นเงื่อนไขประเภทมากกว่าหรือเท่ากับ

ข้อกำหนดที่ 2. $X_1 \leqslant 80$

เพื่อเปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการ จึงบวกตัวแปรเพิ่ม (Slack Variable) เข้าไปในอสมการข้อกำหนดที่ 2

$$X_1 + S_1 = 80$$

ถ้า $X_1 = 0$, $S_1 = 80$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เป็นไปได้ตามข้อกำหนด

ข้อกำหนดที่ 3. $X_2 \geqslant 60$

เปลี่ยนให้เป็นสมการ ด้วยการหักออกด้วยตัวแปรเพิ่ม

$$X_2 - S_2 = 60$$

ถ้า $X_2 = 0$ ตามสมการแรก $S_2 = -60$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะส่วนผสมจะมีค่าเป็นลบไม่ได้

เพื่อไม่ให้ตัวแปรที่มีค่าลบไปปรากฏในคำเฉลยแรก จึงต้องกำหนดตัวแปรสมมุติ (A_2) เพื่อใช้แทน X_2 ในคำเฉลยแรก ดังนั้น สมการตามข้อกำหนดที่ 3 คือ $X_2 - S_2 + A_2 = 60$ ตัวแปร A_2 ที่กำหนดใหม่นี้ทำหน้าที่เหมือนกับ A_1 คือเป็นตัวแปรที่มีค่าสูง ด้วยเหตุที่เป็นตัวแปรที่มีค่าสูงจึงต้องทำให้แน่ใจว่าจะไม่ปรากฏในคำเฉลยสุดท้าย เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณที่มีค่าสูงจึงให้ M แทนค่าตัวเลขสูงนั้น เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้นจึงนำสมการเป้าหมายและสมการข้อจำกัดต่าง ๆ มาเขียนในลักษณะตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง เพื่อจัดลงในตาราง Simplex ดังนี้

สมการเป้าหมาย Min. $C = 3X_1 + 3X_2 + MA_1 + 0S_1 + 0S_2 + MA_2$

ข้อกำหนด

$$X_1 + X_2 + A_1 + 0S_1 + 0S_2 + 0A_2 = 200$$

$$X_1 + 0X_2 + 0A_1 + S_1 + 0S_2 + 0A_2 = 80$$

$$0X_1 + X_2 + 0A_1 + 0S_1 - 0S_2 + 0A_2 = 60$$

และนำไปจัดในรูปตาราง Simplex ดังนี้

ตารางที่ 5.6 ตาราง Simplex แรกของการหาต้นทุนต่ำสุด

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	3	8	M	0	0	M
			X_1	X_2	A_1	S_1	S_2	A_2
M	A_1	200	1	1	1	0	0	0
0	S_1	80	1	0	0	1	0	0
M	A_2	60	0	1	0	0	-1	1
	Z_j	260M	M	2M	M	0	-M	M
	$C_j - Z_j$		3-M	8-2M	0	0	-M	0

คำเฉลยที่ดีที่สุด

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาหาคำเฉลยแรกที่เหมาะสม

จากตาราง Simplex แรก ต้นทุนรวมทั้งสิ้นคือ 260M ซึ่งเป็นต้นทุนที่สูงมาก โดยคำนวณจาก

Z_j (ต้นทุนรวม) $= M(200) + 0(80) + M(60) = 260M$

$Z_{X_1} = M(1) + 0(1) + M(0) = M$

$Z_{X_2} = M(1) + 0(0) + M(1) = 2M$

$Z_{A_1} = M(1) + 0(0) + M(0) = M$

$Z_{S_1} = M(0) + 0(1) + M(0) = 0$

$Z_{S_2} = M(0) + 0(0) + M(-1) = -M$

$Z_{A_2} = M(0) + 0(0) + M(1) = M$

แถวนอน $C_j - Z_j$

$C_{X_1} - Z_{X_1} = 3 - M$

$C_{X_2} - Z_{X_2} = 8 - 2M$

$C_{A_1} - Z_{A_1} = M - M = 0$

$C_{S_1} - Z_{S_1} = 0 - 0 = 0$

$C_{S_2} - Z_{S_2} = 0 - (-M) = M$

$C_{A_2} - Z_{A_2} = M - M = 0$

เมื่อพิจารณาต้นทุนจากแถวนอน $C_j - Z_j$ แล้ว จะเห็นว่าค่าที่ติดลบมากที่สุดคือ แถว $C_{X_2} - Z_{X_2} = 8 - 2M$ ซึ่งอยู่ในแถวตั้ง X_2 ดังนั้นแถวตั้ง X_2 จึงเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุดที่จะถูกเลือกไปแทนที่ เพื่อใช้พัฒนาหาคำเฉลยที่ดีที่สุดต่อไป แต่จะใช้แถวตั้ง X_2 ไปแทนที่แถวนอนแถวใดนั้น เลือกจากการหารแถวตั้งช่องปริมาณด้วยตัวเลขแถวตั้งที่เลือกว่าเป็นคำเฉลยแรกที่เหมาะสม เลือกแถวนอนที่ให้ผลลัพธ์ต่ำสุด ซึ่งในตัวอย่างได้แก่ แถวนอน A_2 จะถูกแทนที่ในตารางต่อไป

$$A_1 = \frac{200}{1} = 200$$

$$S_1 = \frac{80}{0} \quad \text{เป็นไปไม่ได้}$$

$$A_2 = \frac{60}{1} = 60$$

ตารางที่ 5.7 ตาราง Simplex รอบที่ 2

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	3	8	M	0	0	M
			X_1	X_2	A_1	S_1	S_2	A_2
M	A_1	140	1	0	1	0	1	-1
0	S_1	80	1	0	0	1	0	0
8	X_2	60	0	1	0	0	-1	1
	Z_j	140M + 480	M	8	M	0	M-8	8-M
	$C_j - Z_j$		3-M	0	0	0	8-M	2M-8

คำเฉลยที่ดีที่สุด

element ของ X_2 ที่ไปแทนที่แถวนอน A_1 คำนวณจากการหาร element ในแถวนอนเดิม คือ A_2 ด้วย Pivot element ในตารางที่ 5.7

$$\frac{60}{1} = 60, \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{-1}{1} = -1, \quad \frac{1}{1} = 1$$

ส่วน element ที่มาแทนแถวนอนอื่นๆ คือ A_1 และ S_1 คำนวณจากสูตร

element แถวนอนใหม่ = element แถวนอนเดิม - (element ที่เป็นตัวร่วมของแถวนอนกับแถวตั้ง × element ของแถวนอนที่ถูกแทนที่)

element ที่แทนที่ในแถวนอน A_1 คือ

$$140 = 200 - (1 \times 60)$$
$$1 = 1 - (1 \times 0)$$
$$0 = 1 - (1 \times 1)$$
$$1 = 1 - (1 \times 0)$$
$$1 = 0 - (1 \times 0)$$
$$1 = 0 - (1 \times -1)$$
$$-1 = 0 - (1 \times 1)$$

element ที่แทนที่ในแถวนอน S_1 คือ

$$80 = 80 - (0 \times 60)$$
$$1 = 1 - (0 \times 0)$$
$$0 = 0 - (0 \times 1)$$
$$0 = 0 - (0 \times 0)$$
$$1 = 1 - (0 \times 0)$$
$$0 = 0 - (0 \times -1)$$
$$0 = 0 - (0 \times 1)$$

จากตารางที่ 5.7 ต้นทุนรวมคือ

$$Z_j = M(140) + 0(80) + 8(60) = 140M + 480$$
$$Z_{X_1} = M(1) + 0(1) + 8(0) = M$$
$$Z_{X_2} = M(0) + 0(0) + 8(1) = 8$$
$$Z_{A_1} = M(1) + 0(0) + 0(0) = M$$
$$Z_{S_1} = M(0) + 0(1) + 8(0) = 0$$
$$Z_{S_2} = M(1) + 0(0) + 8(-1) = M - 8$$
$$Z_{A_2} = M(-1) + 0(0) + 8(1) = 8 - M$$

$C_j - Z_j$

$$C_{X_1} - Z_{X_1} = 3 - M$$
$$C_{X_2} - Z_{X_2} = 8 - 8 = 0$$
$$C_{A_1} - Z_{A_1} = M - M = 0$$
$$C_{S_1} - Z_{S_1} = 0 - 0 = 0$$
$$C_{S_2} - Z_{S_2} = 0 - (M-8) = 8 - M$$
$$C_{A_2} - Z_{A_2} = M - (8-M) = 2M - 8$$

พิจารณาต้นทุนในแถวนอน $C_j - Z_j$ ในตารางรอบที่ 2 ค่าที่ติดลบมากที่สุดคือ 3-M ซึ่งอยู่ในแถวตั้ง X_1 จึงเลือกแถวตั้ง X_1 ไปแทนที่แถวนอน

แถวนอนที่จะถูกแทนที่โดยแถวตั้ง X_1 คือ S_1 โดยคำนวณจาก

$$A_1 = \frac{140}{1} = 140$$

$$S_1 = \frac{80}{1} = 80$$ ให้ผลลัพธ์ต่ำสุด

$$X_2 = \frac{60}{0} =$$ คำตอบที่เป็นไปไม่ได้

ขั้นตอนที่ 3

จากคำเฉลยที่ปรากฏในตาราง Simplex ที่ 2 พัฒนาหาคำตอบที่เหมาะสมต่อไป โดยวิธีซ้ำในขั้นตอนที่ 2 ซึ่งให้ผลลัพธ์คือตารางที่ 5.8

ตารางที่ 5.8 ตาราง Simplex รอบที่ 3

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	3	8	M	0	0	M
			X_1	X_2	A_1	S_1	S_2	A_2
M	A_1	60	0	0	1	-1	1	-1
3	X_1	80	1	0	0	1	0	0
8	X_2	60	0	1	0	0	-1	1
	Z_j	60M+720	3	8	M	3-M	M-8	8-M
	$C_j - Z_j$		0	0	0	M-3	8-M	2M+8

คำเฉลยที่ดีที่สุด

element ของแถวนอน X_1 ที่ไปแทนที่ X_2 คำนวณดังนี้

$$\frac{80}{1} = 80, \quad \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{0}{1} = 0$$

element ของแถวนอน A_1 และ X_2 ซึ่งคำนวณโดยสูตรในขั้นตอนที่ 2 ที่ปรากฏในตาราง Simplex ที่ 3

element แถวนอน A_1	**element แถวนอน X_2**
$60 = 140 - (1 \times 80)$	$60 = 60 - (0 \times 80)$
$0 = 1 - (1 \times 1)$	$0 = 0 - (0 \times 1)$
$0 = 0 - (1 \times 0)$	$1 = 1 - (0 \times 0)$
$1 = 1 - (1 \times 0)$	$0 = 0 - (0 \times 0)$
$-1 = 0 - (1 \times 1)$	$0 = 0 - (0 \times 1)$
$1 = 1 - (1 \times 0)$	$-1 = -1 - (0 \times 0)$
$-1 = -1 - (1 \times 0)$	$1 = 1 - (0 \times 0)$

ค่า Z_j ในแถวนอน Z

$$Z = M(60) + 3(80) + 8(60) = 60M + 720$$
$$Z_{X_1} = M(0) + 3(1) + 8(0) = 3$$
$$Z_{X_2} = M(0) + 3(0) + 8(1) = 8$$
$$Z_{A_1} = M(1) + 3(0) + 8(0) = M$$
$$Z_{S_1} = M(-1) + 3(1) + 8(0) = 3 - M$$
$$Z_{S_2} = M(1) + 3(0) + 8(-1) = M - 8$$
$$Z_{A_2} = M(-1) + 3(0) + 8(1) = 8 + M$$

ค่า $C_j - Z_j$ ในแถวนอน $C_j - Z_j$

$$C_{X_1} - Z_{X_1} = 3 - 3 = 0$$
$$C_{X_2} - Z_{X_2} = 8 - 8 = 0$$
$$C_{A_1} - Z_{A_1} = M - M = 0$$
$$C_{S_1} - Z_{S_1} = 0 - (3\text{-}M) = M - 3$$

$$C_{S_2} - Z_{S_2} \quad = \quad 0 - (M-8) \quad = \quad 8 - M$$

$$C_{A_2} - Z_{A_2} \quad = \quad M - (8-M) \quad = \quad 2M - 8$$

พิจารณาแถวนอน $C_j - Z_j$ จะเห็นว่ายังมีค่า M ติดลบอีก คือแถวตั้ง 8-M ซึ่งอยู่ในแถวตั้ง S_2 จึงใช้แถวตั้ง S_2 ไปแทนที่เพื่อหาคำเฉลยที่เหมาะสมต่อไปในขั้นตอนที่ 4

ขั้นตอนที่ 4

จากคำเฉลยในตาราง Simplex รอบที่ 3 จะเห็นว่ายังมีค่า M ที่เป็นลบอยู่อีก ในแถวตั้ง S_2 จึงใช้แถวตั้ง S_2 เป็นแถวที่นำไปแทนที่เพื่อคำนวณหาคำเฉลยที่เหมาะสมต่อไป โดยคำนวณซ้ำตามวิธีในขั้นตอนที่ 3 ได้ผลลัพธ์ดังตาราง Simplex รอบที่ 4

ตารางที่ 5.9 ตาราง Simplex รอบที่ 4

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	3	8	M	0	0	M
			X_1	X_2	A_1	S_1	S_2	A_2
0	S_2	60	0	0	1	1	1	-1
3	X_1	80	1	0	0	0	0	0
8	X_2	120	0	1	1	-1	0	0
	Z_j	1200	3	8	8	-5	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	M-8	5	0	M

จากตาราง Simplex รอบที่ 4 พิจารณาแถวนอน $C_j - Z_j$ แล้วจะเห็นว่าไม่มีค่าติดลบในแถวตั้งใดๆ อีกแล้ว ดังนั้น คำเฉลยที่ได้ในตารางที่ 5.9 ถือว่าเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุดคือ $X_1 = 80$, $X_2 = 120$ ต้นทุนต่ำสุด = 1200 เมื่อนำค่าที่ได้ไปทดสอบสมการข้อกำหนด คือ

$$\text{Min. } C \quad = \quad 3(80) + 8(120) \quad = \quad 1200$$

ข้อกำหนด

$$X_1 + X_2 \quad = \quad 200$$

$$X_1 \quad \leqslant \quad 80$$

$$X_2 \quad \geqslant \quad 60$$

$$X_1 , X_2 \quad \geqslant \quad 0$$

ปรากฏว่าคำเฉลยเป็นไปตามข้อกำหนดทุกประการ

สรุป

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นเทคนิคที่นำมาช่วยในการตัดสินใจ การจัดสรรทรัพยากรขององค์กรซึ่งมีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งอาจอยู่ในรูปกำไร ต้นทุน หรือเวลา โดยคำนึงถึงเป้าหมายและเงื่อนไขข้อจำกัดต่าง ๆ ขององค์กร ในการสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง จึงต้องแปลงปัญหาที่จะต้องตัดสินใจให้อยู่ในรูปตัวแบบทางคณิตศาสตร์ โดยการกำหนดตัวแปรที่จะต้องตัดสินใจ สมการเป้าหมาย และสมการหรืออสมการข้อจำกัดเสียก่อน ถ้าหากเป็นปัญหาง่าย ๆ ขนาดเล็กที่มีตัวแปรไม่เกิน 2 ตัว และข้อจำกัดไม่มากนัก อาจหาคำตอบได้โดยวิธีกราฟ แต่ถ้าเป็นปัญหาที่ซับซ้อน และมีตัวแปรและสมการข้อจำกัดหลายตัว การหาคำตอบให้ใช้วิธี Simplex ซึ่งในปัจจุบันได้มีการใช้คอมพิวเตอร์ช่วย ก็จะทำให้ได้รับคำตอบอย่างรวดเร็ว

แบบฝึกหัด

1. สำนักพิมพ์ กข ผลิตหนังสือสองประเภทคือ *ประเภท ก.* ชนิดหน้าปกธรรมดา พิมพ์ด้วยตัวอักษรขาวดำ ใช้เวลาในการผลิต 6 นาทีต่อเล่ม กำไรขั้นต้นเล่มละ 10 บาท *ประเภท ข.* หน้าปกสอดสีสวยงาม ใช้เวลาในการพิมพ์ 12 นาทีต่อเล่ม กำไรขั้นต้นเล่มละ 30 บาท

   คาดว่าในสัปดาห์หนึ่งมีความต้องการหนังสือประเภท ก. ไม่เกิน 300 เล่ม และประเภท ข. ไม่เกิน 100 เล่ม เจ้าของสำนักพิมพ์ได้รับแจ้งว่าเครื่องจักรที่ใช้ในการพิมพ์ทำงานได้ 40 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

   จงหาว่าสำนักพิมพ์จะทำกำไรเท่าไรต่อสัปดาห์ และผลิตหนังสือแต่ละประเภทอย่างไร

2. ผู้จัดการฝ่ายขายของบริษัทมีงบโฆษณา 1,200,000 บาท วางแผนว่าจะลงทุนโฆษณาทางโทรทัศน์ 2 ช่อง ไอทีวี และเอทีวี *ไอทีวี* คิดค่าโฆษณา 8,000 บาทต่อครั้ง และ*เอทีวี*คิด 16,000 บาทต่อครั้ง จากประสบการณ์ผู้จัดการทราบว่าการโฆษณาในโทรทัศน์แต่ละช่องจะมีผลให้สินค้าของเขาเป็นที่รู้จักแพร่หลายในตลาดได้ จะต้องโฆษณาผ่าน *ไอทีวี* อย่างน้อย 50 ครั้ง และ *เอทีวี* อย่างน้อยที่สุด 30 ครั้ง อย่างไรก็ตาม การโฆษณาในทีวีทั้งสองช่องไม่ควรเกินเดือนละ 75 ครั้ง เขาควรวางแผนโฆษณาอย่างไรจึงจะเกิดผลดีที่สุด

3. บริษัทเข็มขัดหนังทำการผลิตเข็มขัด 2 ชนิดคือ ชนิดคุณภาพดีเยี่ยม และคุณภาพปานกลาง *เข็มขัดชนิดคุณภาพดีเยี่ยม* จะขายได้กำไร 40 บาทต่อเส้น แต่ต้องใช้เวลาในการผลิตเป็น 2 เท่าของการผลิต*เข็มขัดคุณภาพปานกลาง* ซึ่งจะได้กำไรเพียงเส้นละ 30 บาท ถ้าบริษัททำการผลิต*เข็มขัดชนิดคุณภาพปานกลาง* อย่างเดียว จะผลิตได้วันละไม่เกิน 1,000 เส้น แต่ถ้าบริษัททำการผลิตเข็มขัดทั้งสองชนิด จะผลิตได้ไม่เกินวันละ 800 เส้นเท่านั้น นอกจากนี้บริษัทมี*หัวเข็มขัดชนิดคุณภาพดีเยี่ยม* เพียง 400 เส้น และ*คุณภาพปานกลาง* 700 เส้น บริษัทจะทำการผลิตเข็มขัด 2 ชนิดอย่างไรจึงจะได้กำไรสูงสุด จงสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงและแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ

4. นาย ก. เป็นเจ้าของโรงงานผลิตอุปกรณ์ไฟฟ้า ในวันหนึ่งๆ เขาจะผลิตอุปกรณ์ X 30 หน่วย และอุปกรณ์ Y 120 หน่วย นาย ข. เป็นน้องนาย ก. และศึกษาวิชาวิเคราะห์เชิงปริมาณ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับเทคนิคโปรแกรมเชิงเส้นตรง จึงศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตของโรงงาน พบว่า อุปกรณ์ทั้งสองประเภทใช้เครื่องจักร 4 ชนิด เวลาที่ใช้ในการผลิต ความสามารถของเครื่องจักร และต้นทุนที่ใช้ในการผลิต มีตารางดังนี้

เครื่องจักร	อุปกรณ์ X	อุปกรณ์ Y	เวลาที่เครื่องจักรทำงานได้
เอ	20 นาทีต่อหน่วย	-	3,000 นาทีต่อวัน
บี	-	30 นาทีต่อหน่วย	5,400 นาทีต่อวัน
ซี	20 นาทีต่อหน่วย	20 นาทีต่อหน่วย	4,400 นาทีต่อวัน
ดี	12 นาทีต่อหน่วย	15 นาทีต่อหน่วย	3,000 นาทีต่อวัน
ต้นทุนการผลิต	40 นาทีต่อหน่วย	32 นาทีต่อหน่วย	

นาย ข. รู้ว่ากำไรที่จะได้ผันแปรโดยตรงกับต้นทุน และสินค้าทั้งสองชนิดที่ผลิตได้ในแต่ละวันจำหน่ายได้หมด เขาจึงสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง และแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ จงหาว่าแต่ละวันโรงงานของนาย ก. จะต้องผลิตอุปกรณ์แต่ละชนิดจำนวนเท่าใด และจะต้องเพิ่มทุนอีกวันละเท่าใด

ถ้าต้นทุนการผลิตอุปกรณ์ X ลดลง 12 บาทต่อหน่วย แผนการผลิตจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

5. ร้านขายอาหารสัตว์ได้รับใบสั่งอาหาร ซึ่งระบุไว้ว่าในอาหารสัตว์จะต้องมีส่วนประกอบของธาตุอาหาร A, B และ C อย่างน้อยที่สุด 60, 84 และ 36 หน่วยตามลำดับ เจ้าของร้านเลือกอาหารสองประเภทมาผสมกัน ส่วนประกอบของอาหารแต่ละประเภทต่อหนึ่งหน่วยน้ำหนักของอาหาร และต้นทุนต่อหน่วยของอาหารทั้งสองกำหนดไว้ดังตาราง

ธาตุอาหาร	อาหารประเภทที่ 1	อาหารประเภทที่ 2
เอ	6 หน่วย	3 หน่วย
บี	6 หน่วย	6 หน่วย
ซี	2 หน่วย	6 หน่วย
ต้นทุนการผลิต	15 หน่วย	9 หน่วย

ก. เจ้าของร้านควรผสมอย่างไรจึงจะได้ธาตุอาหารตรงตามใบสั่ง และเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด

ข. จากอาหารที่ผสมมีส่วนประกอบธาตุอาหารใดที่เกินขีดจำกัดขั้นต่ำ ในปริมาณใด

ค. เนื่องจากอาหารประเภทที่ 2 มีราคาถูก เจ้าของร้านจึงพยายามใช้อาหารประเภทนี้มาก และกำหนดว่าจะใช้ไม่เกิน 12 หน่วยน้ำหนัก ส่วนผสมจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

ง. ถ้าต้นทุนอาหารประเภทที่ 1 เป็น 3 เท่าของประเภทที่ 2 และใบสั่งระบุว่าจะต้องมีอาหารประเภทที่ 1 อย่างน้อยที่สุด 10 หน่วย ส่วนผสมจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

6. จากสมการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

สมการเป้าหมาย $\text{Max. } Z = 2X_1 + 3X_2$

โดยที่

$$3X_1 + 2X_2 < 6$$

$$X_1 < 5$$

$$X_2 < 4$$

และ $X_1 , X_2 > 0$

ก. จงหาคำเฉลยโดยวิธีกราฟ

ข. จัดรูปสมการให้อยู่ในตาราง Simplex

ค. หาคำเฉลยโดยวิธี Simplex

7. จงแก้สมการโดยวิธี Simplex

$$\text{Max. } Z = 2X + 7Y - 3W$$

โดยที่

$$3X + 2W = 9$$

$$2X + 3Y \geqslant 4$$

$$X + Y \geqslant 1$$

$$X, Y, W \geqslant 0$$

8. ห้างหุ้นส่วนรุ่งเรืองจำกัด ผสมปุ๋ยขายเพื่อให้ตรงกับความต้องการของลูกค้า คือ*ปุ๋ยชนิด A* และ*ปุ๋ยชนิด B* ในการผสมปุ๋ยจะต้องผ่าน 2 แผนกคือ *แผนกที่ 1* และ*แผนกที่ 2* โดยมีชั่วโมงการทำงาน ดังนี้

แผนก	ชนิด A	ชนิด B	ชั่วโมงทำงานต่อสัปดาห์
แผนก 1	2	3	40
แผนก 2	3	3	75
ราคาปุ๋ยต่อตัน	200	400	

ก. จงสร้างตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ข. หาคำเฉลยเพื่อวางแผนการผลิตให้ได้กำไรสูงสุดโดยวิธี Simplex

9. กลุ่มแม่บ้านในชนบทกำลังตัดสินใจผลิตตุ๊กตาขาย คือ *ตุ๊กตา A* และ*ตุ๊กตา B* กรรมวิธีการผลิตจะต้องผ่าน 2 ขั้นตอนคือ *การตัดเย็บ*และ*การยัดนุ่น* ตุ๊กตา A ราคาขายตัวละ 60 บาท ต้องใช้เวลา 1 ชั่วโมงในแผนกตัดเย็บ และ 6 ชั่วโมงในแผนกยัดนุ่น ขณะที่ตุ๊กตา B ราคาตัวละ 140 บาท ต้องใช้เวลา 8 ชั่วโมงในแผนกตัดเย็บ และ 12 ชั่วโมงในแผนกยัดนุ่น แผนกตัดเย็บมีเวลาทำงานทั้งหมด 38 ชั่วโมง และแผนกยัดนุ่นมีเวลา 42 ชั่วโมง

ก. สร้างตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ข. หาคำเฉลยปัญหาโดยวิธี Simplex เพื่อวางแผนการผลิตให้ได้ผลผลิตสูงสุด และกำไรสูงสุด

10. ฟาร์มเลี้ยงสุกรเพื่อส่งขาย ทำการผสมอาหารสัตว์เองเพื่อให้ต้นทุนต่ำสุด และได้ธาตุอาหารครบสูตรตามที่ต้องการ ชนิดของอาหารและแร่ธาตุในอาหารแต่ละชนิด ดังแสดงในตาราง

ธาตุอาหาร	ชนิดอาหาร			อัตราอย่างต่ำที่ต้องการ
	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	
คาร์โบไฮเดรท	9	2	4	20
โปรตีน	8	8	6	18
วิตามิน	1	2	6	15
ต้นทุน	70	60	50	

จงสร้างตาราง Simplex และหาคำเฉลย