บทที่ 4

ปัญหาการขนส่ง

(Transportation Problem)

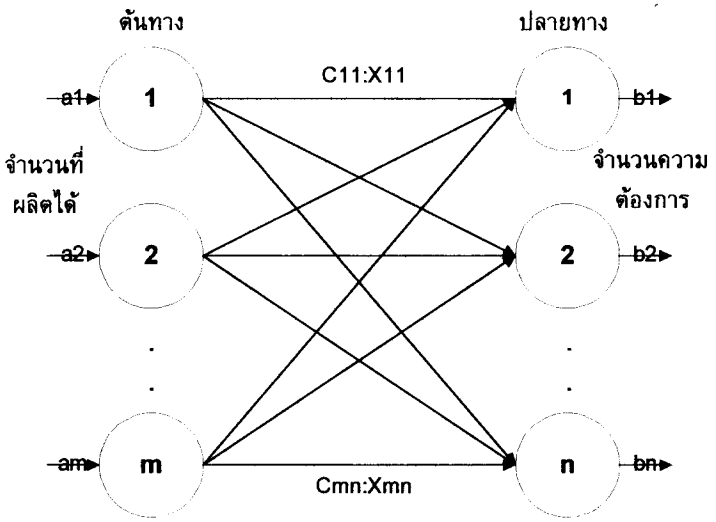
ปัญหาการขนส่ง (Transportation Problem)

การขนส่ง สินค้า วัตถุดิบ หรือพืชผลทางการเกษตร จากต้นทางหรือจากแหล่งผลิต (Sources) ไปยังปลายทางหรือจุดรับสินค้า (Destinations) จะต้องมีเรื่องของค่าใช้จ่ายในการขนส่งมาเกี่ยวข้อง ซึ่งจะส่งผลโดยตรงกับต้นทุนสินค้าหรือบริการนั้น ปัญหาการขนส่งเป็นเรื่องที่ต้องพิจารณาและถ้าหากในการตัดสินใจเลือกเส้นทางในการขนส่งที่มีความซับซ้อนมาก เช่น มีแหล่งผลิตหลายแห่ง และปลายทางหลายแห่ง การตัดสินใจก็จะทำได้ยากขึ้น

จุดประสงค์ของการศึกษาเรื่องปัญหาการขนส่งก็ เพื่อจัดวางเส้นทางในการขนส่งเพื่อลดค่าใช้จ่ายในการขนส่งให้ต่ำที่สุด ซึ่งจะมีข้อจำกัดทั้งทางด้าน ราคาค่าขนส่ง ระยะทาง ปริมาณความต้องการ (Demand) และความสามารถในการแจกจ่ายของแหล่งผลิต (Supply)

ตัวแบบการขนส่ง (Transportation Model)

หลักในการแก้ไขปัญหาการขนส่ง ประยุกต์มาจากการแก้ปัญหาโดยการใช้การโปรแกรมเชิงเส้น ตัวแบบปัญหาการขนส่งทั่วไปสามารถ แสดงในรูปแบบของโครงข่ายดังนี้



รูปที่ 4-1

จากรูปมีแหล่งผลิต หรือต้นทางจำนวน m ตำแหน่ง และปลายทางจำนวน n ตำแหน่ง ทิศทางของการส่งจะแสดงด้วยลูกศร โดยกำหนด i และ j คือปลายทางของการขนส่ง Cij คือ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งหรือกล่าวได้ว่า Cij คือค่าใช้จ่ายในการขนส่งสำหรับเส้นทาง Xij นั่นเอง พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 บริษัทผลิตสินค้าแห่งหนึ่งมีโรงงานอยู่ 3 แห่งด้วยกันคือ ที่ลาดกระบัง บางนา และมีนบุรี มีตัวแทนจำหน่ายที่ต้องการสั่งสินค้าจากโรงงาน 2 แห่ง คือที่ตัวแทนสีลม และปิ่นเกล้า โรงงานมีปริมาณสินค้าเพื่อที่จะรองรับความต้องการจำนวน 1,000 1,500 และ 1,400 ชิ้น ตามลำดับ ระยะทางระหว่างโรงงานแต่ละโรงงานกับตัวแทนจำหน่าย แสดงในตารางต่อไปนี้

ปลายทาง / ต้นทาง	สีลม	ปิ่นเกล้า
ลาดกระบัง	16	43
บางนา	20	21.6
มีนบุรี	20.4	13.6

ระยะทางมีหน่วยเป็นกิโลเมตร สมมติว่าค้าใช้จ่ายในการขนส่งแปรตามระยะทางอย่างคงที่เป็น 5 บาทต่อ 1 กิโลเมตร สามารถเขียนเป็นตารางแสดงค่าใช้จ่ายในการขนส่งดังนี้

ปลายทาง / ต้นทาง	สีลม	ปิ่นเกล้า
ลาดกระบัง	80	215
บางนา	100	108
มีนบุรี	102	68

จากตารางสามารถจัดรูปแบบโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้น

- ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์

$$MinZ = 80X_{11} + 215X_{12} + 100X_{21} + 108X_{22} + 102X_{31} + 68X_{32}$$

การตัดสินใจปัญหาขนส่งก็เพื่อต้องการหาค่าใช้จ่ายในการขนส่งที่ต่ำที่สุด โดยมีตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ (Decision Variable) คือ Xij ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ "0"เป็นเส้นทางในการขนส่ง

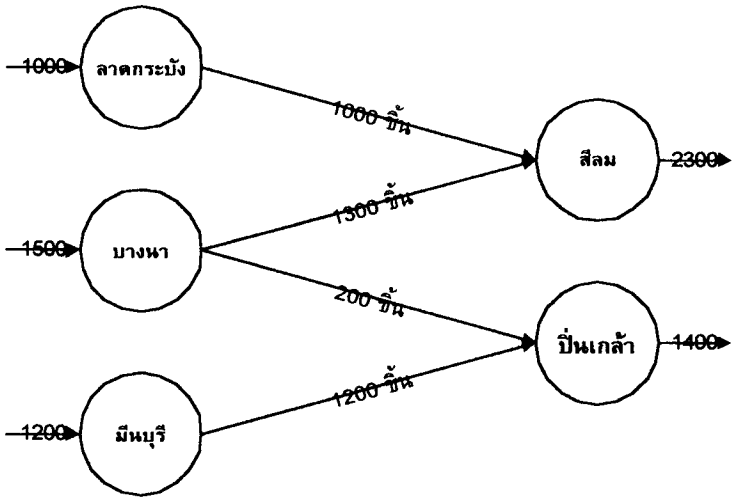
- เงื่อนไขขอบข่าย

$$X_{11} + X_{12} = 1000 \quad \text{(ลาดกระบัง)}$$
$$X_{21} + X_{22} = 1500 \quad \text{(บางนา)} \quad \Big\} \text{ Supply}$$
$$X_{31} + X_{32} = 1200 \quad \text{(มีนบุรี)}$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 2300 \quad \text{(สีลม)}$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1400 \quad \text{(ปิ่นเกล้า)} \quad \Big\} \text{ Demand}$$

เงื่อนไขก็คือ ความสามารถในการผลิต หรือจำนวนที่จัดหาได้ของโรงงาน(Supply) และปริมาณความต้องการของตัวแทนจำหน่าย(Demand) จากสมการข้างบนจะสังเกตเห็นว่ามีตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ และเงื่อนไขเป็นจำนวนมาก ดังนั้นการหาคำตอบด้วย วิธีซิมเพล็กซ์ของการโปรแกรมเชิงเส้นจึงทำได้ยาก มีการดัดแปลงเป็นการหาคำตอบของตัวแบบการขนส่งโดยเฉพาะ โดยจัดเป็นตารางของการขนส่งดังต่อไปนี้

	สีลม	ปิ่นเกล้า	SUPPLY
ลาดกระบัง	80 X11	215 X12	1000
บางนา	100 X21	108 X22	1500
มีนบุรี	102 X31	68 X32	1200
DEMAND	2300	1400	

สังเกตความสัมพันธ์ในการจัดตารางการขนส่ง จะประกอบด้วยเส้นทาง และค่าใช้จ่ายในแต่ละเส้นทาง รวมทั้งความต้องการ(Demand) และ ปริมาณที่สามารถจัดหาได้ (Supply) การตัดสินใจในการแก้ปัญหา การขนส่งคือการตัดสินใจว่าจะเลือกสินค้าจากแหล่งใดในปริมาณที่ต้องการ และค่าใช้จ่ายต่ำ จากตัวอย่างดังกล่าวสมมติว่าผลการแก้ปัญหาเป็นที่เรียบร้อยแล้ว ลักษณะคำตอบจะเป็นดังนี้ และวิธีในการแก้ปัญหาจะอยู่ในหัวข้อถัดไป



รูปที่ 4-2

จากฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง จะเป็น

$$Z = 1000(80)+1300(100)+200(108)+1200(68)= 313200 \text{ บาท}$$

Dummy Plant

ในกรณีที่รูปแบบการขนส่งมีแหล่งผลิต (Supply)ไม่เท่ากับความต้องการ (Demand) เป็นระบบการขนส่งที่ไม่สมดุลย์ แต่การแก้ปัญหาด้วยรูปแบบการขนส่งจะต้องทำการปรับสมดุลย์ ดังนั้นจึงต้องมีการเพิ่มแหล่งจ่ายต้นทาง(Supply) หรือความต้องการ(Demand) จำลองขึ้นมาเรียกว่า Dummy Plant โดยให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งสำหรับเส้นทางที่จำลองขึ้นมามีค่าเป็น "0" และจัดเป็นตารางการขนส่งเพื่อหาคำตอบตามวิธีของตัวแบบการขนส่ง

ตัวอย่างที่ 4.2 จากตัวอย่าง 4.1 ถ้าสมมติให้ โรงงานที่ลาดกระบังสามารถผลิตสินค้าได้เพียง 1,300 ชิ้น จากเดิมคือ 1,500 ชิ้น ซึ่งจะทำให้ปริมาณการผลิตรวมไม่พอต่อความต้องการ ดังนั้นจึงต้องมีการเพิ่ม Dummy Plant เข้าไปในส่วนที่ขาดเพื่อปรับสมดุลย์ในส่วนที่ขาดของโรงงานและเพิ่มความต้องการจำลอง ดังตารางนี้

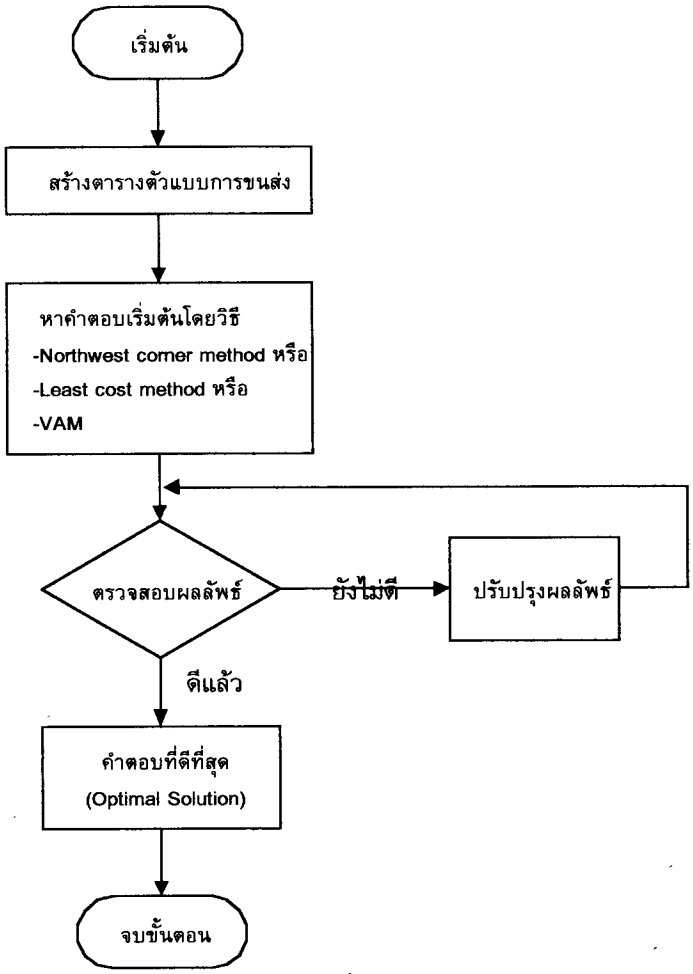
	สีลม	ปิ่นเกล้า	SUPPLY
ลาดกระบัง	80 1000	215	1000
บางนา	100 1300	108	1300
มีนบุรี	102	68 1200	1200
Dummy Plant	0	0 200	200
DEMAND	2300	1400	

หรือในกรณีที่แหล่งผลิต (Supply) มีมากเกินความต้องการ จากตัวอย่างที่ 4.1 สมมติให้ตัวแทนจำหน่ายที่สีลมความต้องการอยู่ที่ 1,900 ชิ้น ลดลง 400 ชิ้น ให้เพิ่ม Dummy plant ในส่วนของความต้องการเข้าไปดังตารางต่อไปนี้

	สีลม	ปิ่นเกล้า	Dummy Plant	SUPPLY
ลาดกระบัง	80 1000	215	0	1000
บางนา	100 900	108 200	0 400	1500
มีนบุรี	102	68 1200	0	1200
DEMAND	1900	1400	400	

การแก้ปัญหาการขนส่ง

การแก้ปัญหาการขนส่งมีลักษณะ หรือขั้นตอนที่คล้ายกับการโปรแกรมเชิงเส้นแต่จะต่างกันที่วิธีในการค้นหาคำตอบ วิธีของการแก้ปัญหาการขนส่งมีข้อกำหนดว่าจำนวนของ คำตอบจะมีค่าเท่ากับ m+n-1 เมื่อ m คือ จำนวนของแหล่งจ่ายต้นทาง และ n คือจำนวนของแหล่งความต้องการปลายทาง ดังแผนผังการค้นหาคำตอบดังต่อไปนี้



รูปที่ 4-3

การหาคำตอบค่าเริ่มต้น

การหาคำตอบค่าเริ่มต้น สามารถหาได้ 3 วิธี แต่ละวิธีมีความแต่ต่างกัน วิธีการหาคำตอบค่าเริ่มต้นที่ยุ่งยากมีความเป็นไปได้สูงที่จะหาคำตอบที่ดีที่สุด ได้เร็ว หรือมีการปรับปรุงผลลัพธ์จำนวนน้อยครั้ง

1. North west Corner method
2. Least Cost method
3. Vogel approximation method (VAM)

การอธิบายการหาคำตอบเริ่มต้นจะอธิบายพร้อมกับตัวอย่างเพื่อการเข้าใจที่ง่ายขึ้น

ตัวอย่างที่ 4.3 บริษัทขนส่งแห่งหนึ่งรับขนมันสำปะหลังจากโกดัง 3 แห่ง ไปส่งยังโรงงานโม่แป้ง 4 แห่ง สรุปเป็นตารางการขนส่งได้ดังนี้

	โรงโม่แป้งที่ 1	2	3	4	SUPPLY
โกดังที่ 1	10 X11	2 X12	20 X13	11 X14	15
โกดังที่ 2	12 X21	7 X22	9 X23	20 X24	25
โกดังที่ 3	4 X31	14 X32	16 X33	18 X34	10
DEMAND	5	15	15	15	

จุดมุ่งหมายของการกำหนดรูปแบบก็เพื่อหาต้นทุนการขนส่งที่ต่ำที่สุดโดยที่ Xij คือ เส้นทางการขนส่ง จากโกดังที่ i ไปยังโรงโม่ที่ j

การหาคำตอบค่าเริ่มต้นด้วยวิธี North west corner method

การหาคำตอบค่าเริ่มต้นแบบ North west corner หรือวิธีมุมตะวันตกเฉียงเหนือมีขั้นตอนดังนี้

1. เริ่มต้นพิจารณาที่มุมบนด้านซ้าย (ตะวันตกเฉียงเหนือ) เลือกจำนวนของความต้องการ(Demand) ที่อยู่ในคอลัมน์แรกมาใส่ในตาราง
2. เปรียบเทียบกับจำนวนจากแหล่งจ่าย (Supply) ที่อยู่แถวแรกต้องไม่มากกว่าจำนวนที่สามารถหาได้
3. พิจารณาในแถวถัดมาในคอลัมน์ที่สองเลือกจำนวนทำเช่นเดิม สังเกต ความสัมพันธ์ จะพิจารณาเป็นเส้นทแยงมุมจากมุมบน ซ้ายมายังมุมล่างขวา ประกอบกับจำนวนของความต้องการและแหล่งจ่ายดังตาราง

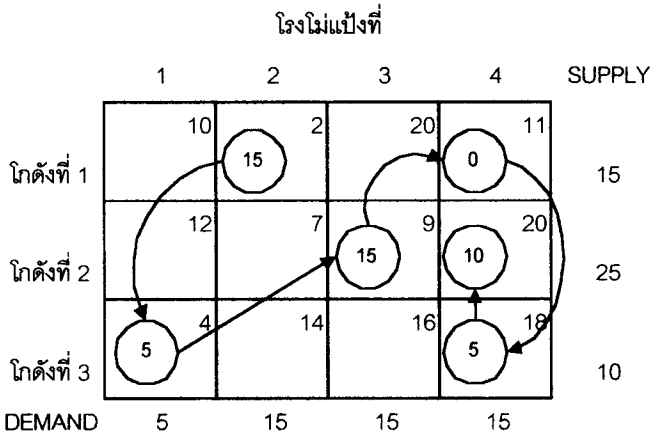
	โรงโม่แป้งที่ 1	2	3	4	SUPPLY
โกดังที่ 1	10 (5)	2 (10)	20	11	15
โกดังที่ 2	12	7 (5)	9 (15)	20 (5)	25
โกดังที่ 3	4	14	16	18 (10)	10
DEMAND	5	15	15	15	

ค่าใช้จ่ายจากการขนส่งด้วยวิธี North west corner คือ

$$Z= (5)(10)+(10)(2)+(5)(7)+(15)(9)+(5)(20)+(10)(18)=520$$

การหาคำตอบค่าเริ่มต้นด้วยวิธี Least cost method หรือค่าเริ่มต้น

วิธีหาต้นทุนต่ำจะพิจารณาเส้นทางการขนส่งที่ใช้ต้นทุนต่ำที่สุดก่อน เรียงลำดับไปยังเส้นทางที่มีต้นทุนมากขึ้นเรื่อยๆ ในขณะเดียวกันต้องพิจารณา จำนวนของความต้องการและแหล่งจ่ายควบคู่กันด้วย



สังเกตว่าในเส้นทาง X_{14} จำเป็นต้องใส่ปริมาณ 0 เข้าไป เนื่องจากว่า มีข้อกำหนดในการหาคำตอบ ว่าจำนวนคำตอบต้องเท่ากับ m+n-1 ค่า เมื่อ m=3 และ n=4 จำนวนคำตอบจึงเป็น 6 คำตอบดังนั้นจึงต้องเพิ่ม 0 เข้าไปอีก 1 คำตอบ เหตุที่ต้องทำเช่นนี้ เพราะจะมีผลในการหาคำตอบที่ดีที่สุด(Optimal solution)

ค่าใช้จ่ายจากการใช้ Least cost method

$$Z = (15)(2)+(0)(1)+(15)(9)+(10)(20)+ (5)(4) +(5)(18) = 475$$

จะเห็นว่าค่าที่ได้จากวิธี Least cost method จะมีต้นทุนในการขนส่งต่ำกว่าวิธี North west corner Method

วิธี Vogel approximation method

หรือเรียกว่าวิธี VAM มีขั้นตอนดังนี้

1. หาผลต่างระหว่างค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด และรองลงมาของแต่ละแถวแต่ละหลัก
2. พิจารณาเลือกผลต่างที่มีค่ามากที่สุดของแถวหรือคอลัมน์ พิจารณาค่าใช้จ่ายของเส้นทางในแถวหรือคอลัมน์นั้น เลือกเส้นทางที่มีค่าใช่จ่ายต่ำที่สุด พิจารณาใส่ค่าของจำนวนความต้องการ (Demand) และจำนวนของแหล่งจ่าย (Supply) ให้สอดคล้องกัน
3. ตัดแถวหรือคอลัมน์ที่มีค่าสมดุลย์แล้วในข้อ 2 ออกหาผลต่างเช่นเดียวกับข้อ1
4. เลือกผลต่างที่มากที่สุดจับคู่เช่นเดียวกับข้อ 2 จนครบดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 4.4 การหาคำตอบค่าเริ่มต้นด้วยวิธี VAM

โรงโม่แป้งที่

	1	2	3	4	SUPPLY	ผลต่าง
โกดังที่ 1	10	2	20	11	15	8
โกดังที่ 2	12	7	9	20	25	2
โกดังที่ 3	(5) 4	14	16	18	10	10
DEMAND	5	15	15	15		
ผลต่าง	6	5	7	7		

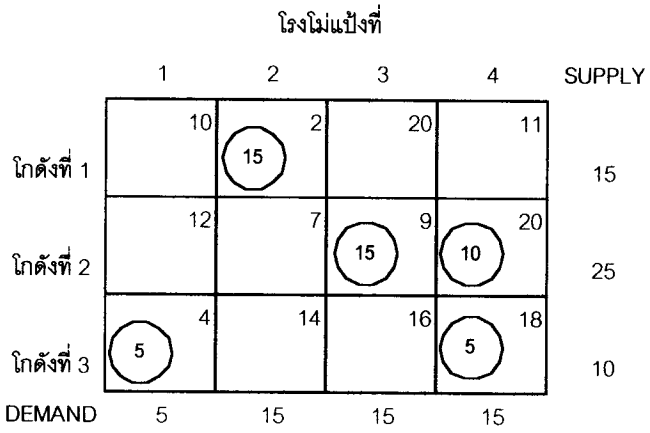
จากตารางสังเกตผลต่างที่มากที่สุด คือ แถวที่ 3 มีผลต่างเป็น 10 สังเกตค่าใช้จ่ายของเส้นทางในแถวที่3 ค้าใช้จ่ายในคอลัมน์ที่ 1 มีค่าต่ำที่สุด พิจารณาใส่ค่าของ จำนวนที่จะจัดการขนส่ง ทำการตัดคอลัมน์ที่ 1 ออกไป ทำการหาผลต่างใหม่

โรงโม่แป้งที่

	2	3	4	SUPPLY	ผลต่าง
โกดังที่ 1	(15) 2	20	11	15	9
โกดังที่ 2	7	9	20	25	2
โกดังที่ 3	14	16	18	10	2
DEMAND	15	15	15		
ผลต่าง	5	7	7		

	3	4	SUPPLY	ผลต่าง
โกดังที่ 2	(15) 9	(10) 20	25	11
โกดังที่ 3	16	(5) 18	10	2
DEMAND	15	15		
ผลต่าง	7	7		

สรุป คำตอบโดยใช้วิธี VAM เป็นดังตารางต่อไปนี้



ค่าใช้จ่ายจากการใช้วิธี VAM คือ

$$Z = (15)(2)+(15)(9)+(10)(20)+(5)(4)+(5)(18)=475$$

ความหมายของตัวแปรในตัวแบบการขนส่ง

1. ***ตัวแปรมูลฐาน (Basic Variable)*** คือตัวแปรในคำตอบเริ่มต้นที่ไม่เป็น"0" หรืออาจกล่าวได้ว่า เป็นกลุ่มตัวแปรของเส้นทาง Xij ใดๆที่ถูกเลือกจากการหาคำตอบค่าเริ่มต้นซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับ m+n-1
2. ***ตัวแปรอมูลฐาน (Non Basic Variable)*** คือ ตัวแปรในคำตอบเริ่มต้นที่มีค่าเป็น"0"หรือกลุ่มตัวแปรของเส้นทาง Xij ใดๆที่ไม่ถูกเลือกจากการหาคำตอบเริ่มต้น
3. ***ตัวแปรเข้า (Entering Variable)*** คือกลุ่มของตัวแปรอมูลฐานที่ถูกเลือกให้ต้องปรับปรุงคล้ายกับการหาแถวหลักแนวตั้ง (Pivot Column) ในการหาคำตอบของซิมเพล็กซ์
4. ***ตัวแปรออก (Leaving Variable)*** คือ กลุ่มของตัวแปรมูลฐานที่ถูกเลือกออกและให้แทนที่ด้วยตัวแปรเข้า เพื่อให้เป็นคำตอบใหม่ที่ดีกว่าคำตอบเดิม

การตรวจสอบผลลัพธ์ในตัวแบบการขนส่ง

จากวิธีของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงสามารถหาความสัมพันธ์ของปัญหาควบคู่(Dual Problem) ได้จากปัญหาเดิม (Primal Problem) ในปัญหาการขนส่ง อาศัยความสัมพันธ์ของปัญหาควบคู่เป็นเครื่องมือช่วย ในการพิจารณาการตรวจสอบผลลัพธ์พิจารณาปัญหาควบคู่ของตังแบบการขนส่ง

$$Z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \qquad \text{Subject to: } u_i + v_j \le C_{ij}$$

เมื่อ

a_i คือ จำนวนของแหล่งผลิตต้นทาง (Supply) ที่ i

b_j คือจำนวนของความต้องการปลายทาง (Demand) ที่ j

C_{ij} คือค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากต้นทาง i ไปยังปลายทางที่ j

u_i คือตัวแปรควบคู่ของขอบข่ายที่ต้นทาง i

v_j คือตัวแปรควบคู่ของขอบข่ายที่ปลายทาง j

จากความสัมพันธ์จะได้ว่า

$$u_i + v_j = C_{ij}$$

สำหรับทุกค่าของตัวแปรมูลฐาน (Basic variable) หรือที่เส้นทาง Xij ที่ถูกเลือกจากการหาคำตอบค่าเริ่มต้นและ

ดัชนีการตรวจสอบ $= u_i + v_j - C_{ij}$

สำหรับทุกค่าของตัวแปร อมูลฐาน (Non Basic Variable) หรือเส้นทางXij ที่ไม่ถูกเลือกจากการหาคำตอบค่าเริ่มต้น

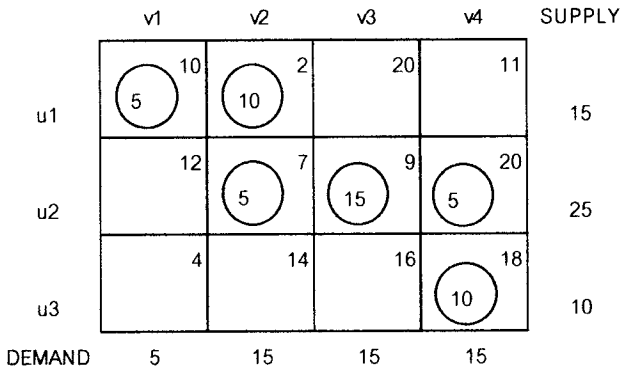
การพิจารณาจะพิจารณาค่าของดัชนีการตรวจสอบที่มีค่าเป็นบวกมากที่สุด ให้เป็นตัวแปรเข้า (Entering variable) คำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดก็ต่อเมื่อ ค่าของดัชนีการตรวจสอบทุกค่ามีค่าเป็นลบหมดทุกค่า เช่นเดียวกับการหาคำตอบค่าต่ำสุดในวิธีซิมเพล็กซ์นั่นเอง

การหาคำตอบที่ดีที่สุด (Optimal Solution)

หลังจากที่หาคำตอบค่าเริ่มต้นแล้วทำการหาคำตอบดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. ทำการคำนวณหาค่าของดัชนีการตรวจสอบถ้าทุกค่าเป็นลบหมดทุกค่า แสดงว่าคำตอบค่าเริ่มต้นเป็นคำตอบที่ดีที่สุด
2. กำหนดตัวแปรเข้า (Entering Variable) จากกลุ่มตัวแปรอมูลฐาน(Non basic variable) ที่มีค่าดัชนีการตรวจสอบที่มีค่าเป็นบวกมากที่สุด
3. ทำการปรับปรุงผลลัพธ์ โดยการลากเส้นวงปิด โดยที่จำนวนของคำตอบต้องเท่ากับ m+n-1 สังเกตจากตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 4.5 จากตัวอย่างการหาคำตอบเริ่มต้นด้วยวิธี North west corner จงหาคำตอบที่ดีที่สุด



<u>วิธีทำ</u> คำนวณดัชนีการตรวจสอบ

จาก $u_i + v_j = C_{ij}$ กับกลุ่มตัวแปรมูลฐาน(Basic Variable) คือ X_{11}, X_{12} $X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$ ได้ว่า กำหนดให้ $u_1 = 0$ เป็นค่าเริ่มต้น

$$u_1 + v_1 = 10 \; ; u_1 = 0, v_1 = 10$$
$$u_1 + v_2 = 2 ; u_1 = 0, v_2 = 2$$
$$u_2 + v_2 = 7 ; v_2 = 2, u_2 = 5$$
$$u_2 + v_3 = 9 ; u_2 = 5, v_3 = 4$$
$$u_2 + v_4 = 20 \; ; u_2 = 5, v_4 = 15$$
$$u_3 + v_4 = 18 \; ; v_4 = 15 \; , u_3 = 3$$

หาดัชนีการตรวจสอบจากกลุ่มตัวแปรอมูลฐาน(Non Basic Variable)คือ X_{13}, X_{14} $X_{12}, X_{31}, X_{32}, X_{33}$ ได้ว่า

$$u_1 + v_3 - 20 = -16$$
$$u_1 + v_4 - 11 = 4$$
$$u_2 + v_1 - 12 = 3$$
$$u_3 + v_1 - 4 = 9 \qquad \text{(ตัวแปรเข้า)}$$
$$u_3 + v_2 - 14 = -9$$
$$u_3 + v_3 - 16 = -9$$

จะเห็นว่า ค่าดัชนีการตรวจสอบยังคงเป็นค่าเป็นบวกอยู่ กำหนดให้ตัวแปร X_{31} เป็นตัวแปรเข้าเพราะมีค่าดัชนีการตรวจสอบเป็นบวกมากที่สุด

	v1=10	v2=2	v3=4	v4=15	SUPPLY
u1=0	10 (5)	2 (10)	20	11	15
u2=5	12	7 (5)	9 (15)	20 (5)	25
u3=3	4 ตัวแปรเข้า	14	16	18 (10)	10
DEMAND	5	15	15	15	

ทำการปรับปรุงผลลัพธ์ครั้งที่ 1

จากตาราง X_{31} เป็นตัวแปรเข้า หมายความว่าการเพิ่มค่าให้กับ X_{31} จะมีผลให้คำตอบที่ปรับปรุงเป็นคำตอบที่ดีขึ้น โดยใช้วิธีลากเส้นวงปิดเริ่มจากจุดที่เป็นตัวแปรเข้าไปยังจุดมุมที่เป็นมุมโดยทั่วไปจะให้ผ่านกลุ่มตัวของแปรมูลฐานและสามารถวกกลับมาที่ตำแหน่งเดิม กำหนดให้จุดหักมุมเป็นจุดแสดงเครื่องหมายโดยจะสลับเครื่องหมายเริ่มต้นจากเครื่องหมายบวก และแทนตัวแปรที่จุดเริ่มต้นเป็น "K" สังเกตความสัมพันธ์จากตัวอย่าง

(-) 10 5-K	(+) 2 10+K	20	11
12	(-) 7 5-K	9 15	(+) 20 5+K
(+) 4 K	14	16	(-) 18 10-K

การพิจารณาปรับปรุงผลลัพธ์คือการเพิ่มค่าที่ตัวแปรเข้าและลดค่าในตัวแปรมูลฐานที่จุดหักมุมเครื่องหมายเป็นลบ สังเกตว่าจะอยู่ภายในเงื่อนไข ดังนี้

$$5-K \geq 0$$

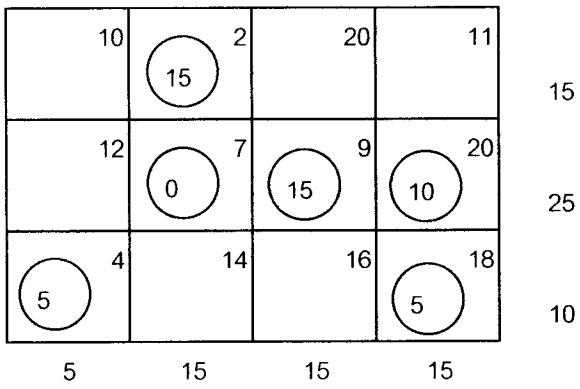
$$5-K \geq 0$$

$$10-K \geq 0$$

ค่าของ K ที่เป็นจริงทุกเงื่อนไขคือ 5

อาจกล่าวได้ว่าการปรับปรุงผลลัพธ์คือการย้ายเส้นทางการขนส่งจากตำแหน่งของจุดหักมุมวงปิดที่เครื่องหมายเป็นลบและมีค่าน้อยที่สุดไปแทนที่ในตำแหน่งของตัวแปรเข้าจากนั้นจัดตำแหน่งอื่นๆให้เป็นไปตามเงื่อนไขของ Demand และ Supply

สามารถเขียนเป็นตารางการขนส่งใหม่ได้ดังนี้



จำนวนของคำตอบที่ได้จะต้องมีจำนวนเท่ากับ m+n-1 ตัวแปรมูลฐานที่ถูกตัดออกไป คือตัวแปรออก (Leaving Variable) ทำการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้

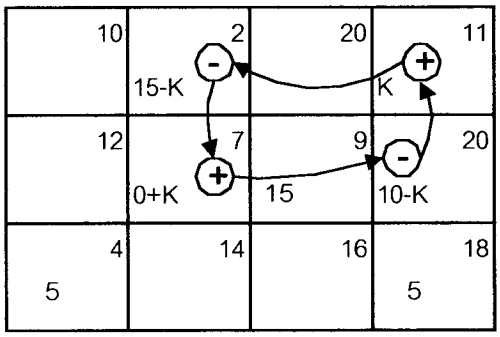
$$u_1 + v_2 = 2; u_1 = 0, v_2 = 2$$
$$u_2 + v_2 = 7; v_2 = 2, u_2 = 5$$
$$u_2 + v_3 = 9; u_2 = 5, v_3 = 4$$
$$u_2 + v_4 = 20; u_2 = 5, v_4 = 15$$
$$u_3 + v_1 = 4; u_3 = 3, v_1 = 1$$
$$u_3 + v_4 = 18; v_4 = 15, u_3 = 3$$

คำนวณดัชนีการตรวจสอบ

$$u_1 + v_1 - 10 = -9$$
$$u_2 + v_1 - 12 = -6$$
$$u_3 + v_2 - 14 = -9$$
$$u_1 + v_3 - 20 = -16$$
$$u_3 + v_3 - 16 = -9$$
$$u_1 + v_4 - 11 = 4 \qquad \text{(ตัวแปรเข้า)}$$

คำตอบที่ได้ยังต้องทำการปรับปรุงต่อไป จากการคำนวณกำหนดให้ X_{14} เป็นตัวแปรเข้า โดยสังเกตจากเครื่องหมายของดัชนีการตรวจสอบยังไม่เป็นลบหมดทุกค่า

ทำการปรับปรุงผลลัพธ์ครั้งที่ 2



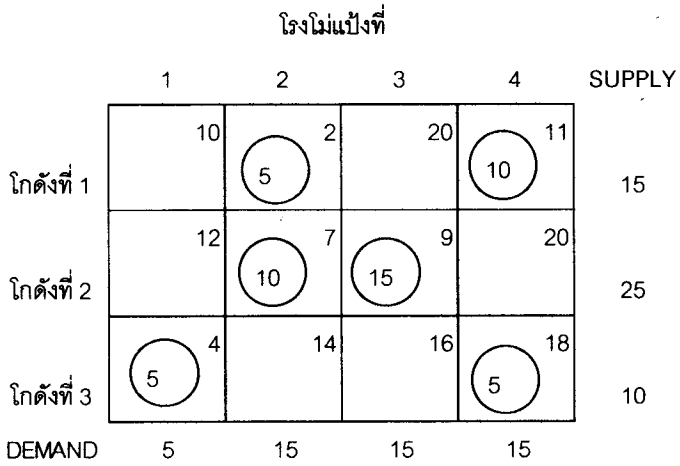
หรืออีกนัยหนึ่งการพิจารณาปรับปรุงผลลัพธ์คือการเพิ่มค่าที่ตัวแปรเข้าให้มากที่สุด และลดค่าในตัวแปรมูลฐานที่จุดหักมุมเป็นค่าลบให้มากที่สุดแต่ต้องอยู่ภายในเงื่อนไข ดังนี้

$$15 - K \geq 0$$

$$10 - K \geq 0$$

ค่าของ K ที่เป็นจริงทุกเงื่อนไขคือ 10

สามารถเขียนเป็นตารางการขนส่งใหม่ได้ดังนี้



ทำการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้

$$u_1 + v_2 = 2; u_1 = 0, v_2 = 2$$

$$u_2 + v_4 = 11; u_1 = 0, v_4 = 11$$

$$u_2 + v_2 = 7; v_2 = 2, u_2 = 5$$

$$u_2 + v_3 = 9; u_2 = 5, v_3 = 4$$
$$u_3 + v_1 = 4; u_3 = 7, v_1 = -3$$
$$u_3 + v_4 = 18; v_4 = 11, u_3 = 7$$

คำนวณดัชนีการตรวจสอบ

$$u_1 + v_1 - 10 = -13$$
$$u_1 + v_3 - 20 = -16$$
$$u_1 + v_1 - 12 = -10$$
$$u_2 + v_4 - 20 = -4$$
$$u_3 + v_2 - 14 = -5$$
$$u_3 + v_3 - 16 = -5$$

จากดัชนีการตรวจสอบพบว่าค่าทุกค่าเป็นลบหมดทุกค่า ดังนั้นสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุด สามารถพิสูจน์ได้ว่าการปรับปรุงผลลัพธ์สามารถลดค่าใช้จ่ายได้จริง จากการหาคำตอบเริ่มต้นด้วยวิธี North west corner method มีค่าใช้จ่าย

Z= (5)(10)+(10)(2)+(5)(7)+(15)(9)+(5)(20)+(10(18)=520

การปรับปรุงครั้งที่ 1

Z=(15)(2)+(0)(7)+(15)(9)+(10)(20)+(5)(4)+(5)(18)=475

การปรับปรุงครั้งที่ 2

Z=(5)(2)+(10)(7)+(15)(9)+(10)(11)+(5)(4)+(5)(18)= 435

ตัวอย่างที่ 4.6 จากตัวอย่างที่ 4.1 การผลิตสินค้าให้กับตัวแทนจำหน่ายได้ดังตารางต่อไปนี้

	สีลม	ปิ่นเกล้า	SUPPLY
ลาดกระบัง	80 X11	215 X12	1000
บางนา	100 X21	108 X22	1500
มีนบุรี	102 X31	68 X32	1200
DEMAND	2300	1400	

<u>วิธีทำ</u>

หาคำตอบเบื้องต้นด้วย North west corner method

	สีลม	ปิ่นเกล้า	SUPPLY
ลาดกระบัง	80 1000	215	1000
บางนา	100 1300	108 200	1500
มีนบุรี	102	68 1200	1200
DEMAND	2300	1400	

ทำการตรวจสอบผลลัพธ์

$$u_1 + v_1 = 80 \; ; u_1 = 0 \, , v_1 = 80$$
$$u_2 + v_1 = 100 \; ; v_1 = 80 \, , u_1 = 20$$
$$u_2 + v_2 = 108 \; ; u_2 = 20 \, , v_2 = 88$$
$$u_3 + v_2 = 68 \; ; v_2 = 88 \, , u_3 = -20$$

คำนวณดัชนีการตรวจสอบ

$$u_1 + v_2 - 215 = -127$$
$$u_3 + v_1 - 102 = -42$$

	v1=80	v2=88	SUPPLY
u1=0	80 1000	215	1000
u2=20	100 1300	108 200	1500
u3=-20	102	68 1200	1200
DEMAND	2300	1400	

จากดัชนีการตรวจสอบพบว่าค่าทุกค่าเป็นลบหมดทุกค่า ดังนั้นสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุด

Z = 1000(80)+1300(100)+200(108)+1200(68)= 313200 บาท