

# บทที่ 8

---

## ตัวแบบแถวคอย

## ❑ แบบแถวคอย (waiting line system)

- ระบบแถวคอยหรือเรียกว่า
- ระบบคิว (queuing system)
  - เป็นระบบที่อยู่ใกล้กับตัวเรามาก
  - ในชีวิตประจำวันจะเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของระบบคิว

เช่น รอรถประจำทาง รอซื้ออาหาร รอจ่ายเงินใน **supermarket** รอยืม/  
คืนหนังสือที่ห้องสมุด รอให้แพทย์ตรวจรักษา รอสายโทรศัพท์จากศูนย์บริการ ฯลฯ

## □ การศึกษาในมุมมองของผู้บริหารระบบ

- ต้องการควบคุมดูแลเกี่ยวกับค่าใช้จ่ายในการให้บริการลูกค้า
- เป็นเครื่องมือวิเคราะห์ระบบบริการเพื่อประโยชน์ในการตัดสินใจต่าง ๆ
- ระบบแถวคอยเป็นระบบที่ปรากฏอยู่ในองค์กรทั้งภาครัฐและเอกชน
- ต้องการให้บริการลูกค้าอย่างดีที่สุด

## กิจการของภาครัฐและภาคเอกชนที่ผลิตสินค้าและบริการ

- ระบบการผลิตในโรงงาน
- ระบบบริการซ่อมแซมเครื่องจักรหรืออุปกรณ์เครื่องใช้
- ระบบการขนถ่ายสินค้า
- ระบบการขึ้นลงของเครื่องบินในสนามบินต่าง ๆ
- ระบบการชำระเงินค่าบริการต่าง ๆ
- ระบบการให้บริการในธนาคาร
- ระบบการจัดพิมพ์เอกสาร

## □ ลักษณะของระบบแถวคอย

- ปัจจัยที่กำหนดลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอยที่สำคัญประกอบด้วย 3 ส่วน
  1. ลูกค้า
  2. แถวคอย
  3. หน่วยให้บริการ

## 8.1 ลักษณะของระบบแถวคอย

### • 1. ลูกค้า

คือ จำนวนประชากรและลักษณะการเข้ามาใช้บริการของลูกค้า

1.1 จำนวนประชากร (**population**) คือ ผู้ที่มีโอกาสเข้ามาใช้บริการในระบบ

- จำนวนประชากรมากหรือน้อยไม่จำกัด (**infinite population**)

เช่น คลินิกแพทย์ ธนาคาร ปั้มน้ำมัน supermarket

- จำนวนประชากรน้อยหรือประชากรจำกัด (**finite population**)

เช่น เครื่องถ่ายเอกสารในบริษัทที่มีพนักงานเพียง 10 คน

## ❑ ลักษณะของระบบแถวคอย

- 1.2 ลักษณะการเข้ามารับบริการของลูกค้า (arrival characteristic)

### 1.2.1 แบบคงที่ (constant)

คือ ลูกค้าเข้ามารับบริการเป็นจำนวนเท่า ๆ กัน ในแต่ละช่วงเวลา เช่น วันละ 30 คน ชั่วโมงละ 5 เครื่อง หรือลูกค้าแต่ละรายมาห่างกันคนละ 10 นาที ลักษณะเช่นนี้จะพบในสายการผลิตโรงงานอุตสาหกรรมที่ใช้ระบบอัตโนมัติ เช่น โรงการผลิตเครื่องดื่ม โรงงานผลิตอาหารกระป๋อง

### 1.2.2 (random)

คือ ลูกค้าเข้ามาในลักษณะที่ไม่แน่นอน ไม่สามารถทราบล่วงหน้า และการเข้ามาของลูกค้าแต่ละรายจะเป็นอิสระต่อกัน เช่น ลูกค้ามาเบิกเงินที่เครื่องฝากถอนอัตโนมัติ ลูกค้าที่ชำระเงินที่พนักงานรับจ่ายเงินใน **supermarket** บางช่วงเวลาอาจมีลูกค้าแต่ละรายมามาก หรือน้อย หรือไม่มีเลย

- **2. แฉวคอย** ลักษณะสำคัญที่เกี่ยวข้งกับ คือความยาวของแฉวคอย และรูปแบบการจักระบบแฉวคอย

### 2.1 ความยาวของแฉวคอย

- ระบบลูกค้ำสามารถรออยู่ในแฉวคอยได้น้อยหรือแบบจำกัด
- ระบบลูกค้ำสามารถรอในแฉวคอยแบบมากหรือไม่จำกัด

### 2.2 รูปแบบการจักระบบแฉวคอย

#### 2.2.1 ระบบแฉวคอยแบบช่องทางเดียว หรือชั้นตอนเดียว

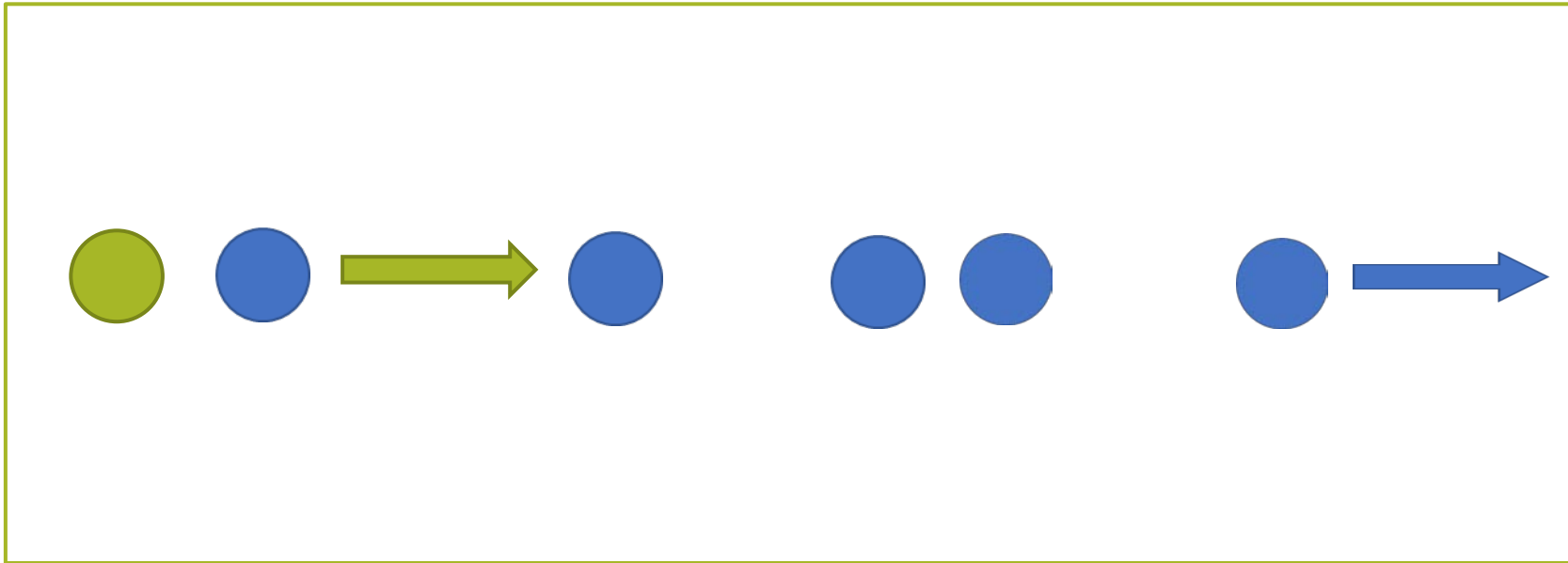
(single channel, single phase system)

คือระบบบริการแฉวคอยที่มีหน่วยให้บริการหน่วยเดียว เช่นเครื่องฝากถอน

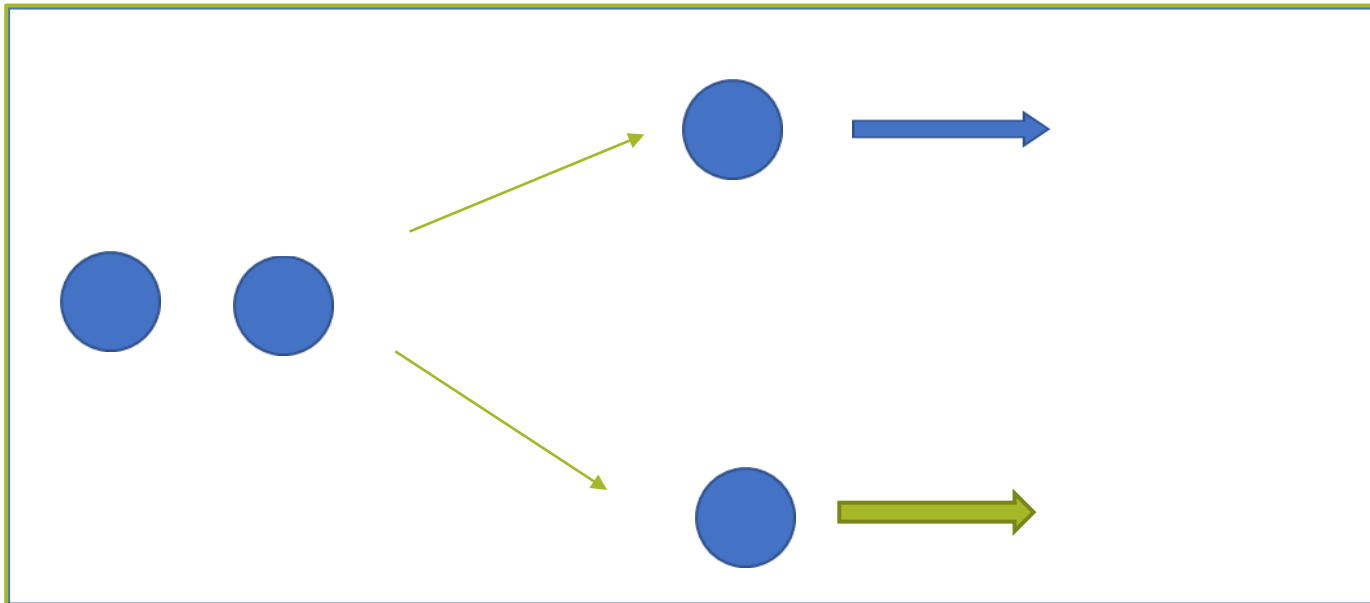
เงินอัตโนมัติ



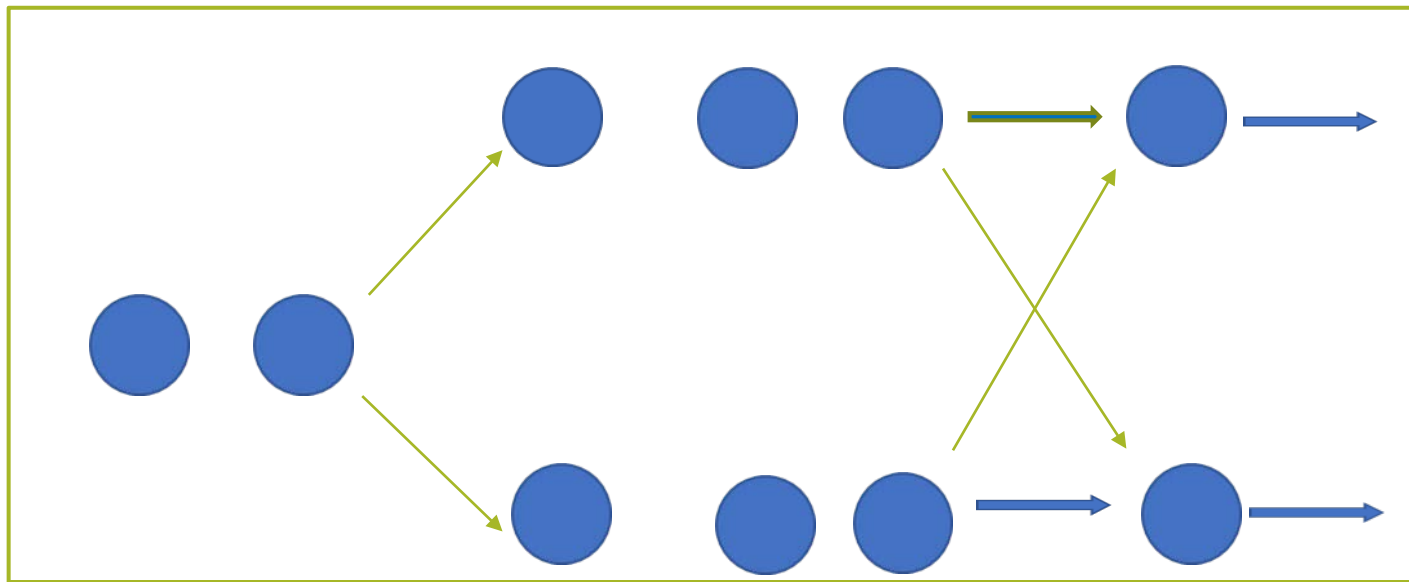
- 2.2.2 ระบบแถวคอยแบบช่องทางเดียว - หลายขั้นตอน (single channel ,multiple phase system) คือระบบแถวคอยที่มีขั้นตอนการบริการหลายขั้นตอน เช่น แผนกจ่ายยาของโรงพยาบาลซึ่งมีพนักงานจ่ายยา 1 คน เมื่อคนไข้ชำระเงินแล้วรอรับยาจากพนักงานจ่ายยา 1 คน



2.2.3 ระบบแถวคอยแบบหลายช่องทาง – ชั้นตอนเดียว (multiple channel, single phase system) คือระบบแถวคอยที่มีชั้นตอนบริการชั้นเดียวแต่มีหน่วยในการให้บริการหลายหน่วย มากกว่า 1 หน่วย เช่นเคาเตอร์บริการฝากถอนเงินในธนาคารพาณิชย์ที่มีพนักงานหลายคนและจัดให้มีแถวคอยแถวเดียวหรือบัตรคิว



- 2.2.4 ระบบแถวคอยแบบหลายช่องทาง – หลายขั้นตอน (multiple channel ,multiple phase system) คือ คือระบบแถวคอยที่มีขั้นตอนบริการหลายขั้นแต่ละขั้นตอนมีหน่วยในการให้บริการหลายหน่วย มากกว่า 1 หน่วย เช่น เช่น แผนกจ่ายยาของโรงพยาบาลที่มีพนักงานรับเงินและจ่ายยาให้คนไข้แต่ละจุดจะมีพนักงานหลายคนทำหน้าที่เหมือนกัน



### • 3. หน่วยให้บริการ ลักษณะสำคัญ

#### • 3.1 ระเบียบการให้บริการ

- หมายถึงกฎเกณฑ์ที่ระบบนั้นใช้ในการกำหนดว่าจะให้บริการแก่ลูกค้ารายใดก่อน เช่น

- 1) ลูกค้าที่มาก่อนจะได้รับบริการก่อน
- 2) ลูกค้าที่มาทีหลังจะได้รับบริการก่อน
- 3) ลูกค้าที่มีความจำเป็นมากกว่าจะได้รับบริการก่อน

#### • 3.2 ลักษณะการให้บริการ

หน่วยบริการในระบบอาจให้บริการแบบใดแบบหนึ่ง

3.1.1 แบบคงที่ คือในการบริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาเท่า ๆ กัน

3.1.2 แบบสุ่ม ลูกค้าแต่ละรายมีลักษณะไม่เหมือนกัน หรือให้บริการลูกค้าแต่ละคนไม่เท่ากัน จึงใช้เวลาในการให้บริการไม่เท่ากัน

## 8.2 ข้อมูลการมาเข้ารับบริการและให้บริการ

- ลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย จะต้องเก็บรวบรวมข้อมูลจากการมาเข้ารับบริการและการให้บริการ

ถ้าข้อมูลเป็นลักษณะสุ่ม (random) ต้องศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็นของข้อมูลว่ามีลักษณะอย่างไร

- แบบปกติ (normal distribution)
- แบบปัวซอง (Poisson distribution)
- แบบเอกซ์โปเนนเชียล (exponential distribution)

## กรณีข้อมูลอยู่ในลักษณะจำนวนลูกค้าต่อหน่วยเวลา

- อัตราการเข้ามารับบริการ ซึ่งหมายถึงจำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการได้ใน 1 หน่วยเวลา หรือ อัตราการให้บริการซึ่งหมายถึง จำนวนลูกค้าที่ให้บริการได้ใน 1 หน่วยเวลา เช่นการแจกแจงความน่าจะเป็นของอัตราการเข้ามารับบริการสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่มีลูกค้าเข้ามา  $X$  ราย ได้ดังนี้

$$P(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{ เมื่อ } x = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n$$

$x$  = จำนวนลูกค้าต่อหน่วยเวลา

$\lambda$  = อัตราการเข้ามารับบริการ

$$e = 2.7183$$

## กรณีข้อมูลที่รวบรวมในลักษณะเวลา

- คือ เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการหรือเวลาในการให้บริการบริการ
- เช่นการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาในการให้บริการสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่จะใช้เวลาในการให้บริการมากกว่า  $x$  นาที ได้โดยใช้สูตรดังนี้

$$P(\text{service time} > x) = e^{-\mu x}, \text{ เมื่อ } x > 0$$

$\mu$  = อัตราการให้บริการ

$X$  = เวลาที่ใช้ในการให้บริการ

$e=2.7183$

## 8.3 ตัวแปรแถวคอย

- **M = Markovian** หมายถึงการเข้ารับบริการลักษณะสุ่ม ในอัตราเฉลี่ย  $\lambda$  แจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซองหรือหมายถึงเลาระหว่างการเข้ามารับบริการที่มีค่าเฉลี่ย  $1/\lambda$  ซึ่งแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
- หรือ **M** คือลักษณะการให้บริการแบบสุ่มมีค่าเฉลี่ย  $1/\mu$
- **D = Deterministic** หมายถึงการเข้ามารับบริการ หรือการให้บริการที่มีลักษณะคงที่
- **G = General** การเข้ามารับบริการ หรือ การให้บริการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ



## 8.4 สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบแถวคอย

- สัญลักษณ์ที่ใช้ในการแสดงข้อมูลต่าง ๆ ในตัวแบบแถวคอย มีดังนี้
- $\lambda$  = อัตราการเข้ามารับบริการ ( จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา)
- $\mu$  = อัตราการให้บริการ (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่หน่วยให้บริการแต่ละหน่วยให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา)
- $\frac{1}{\mu}$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการให้บริการลูกค้า 1 ราย
- $P$  = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน
- $p_0$  = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

## □ สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบแถวคอย

- $L_S$  = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ
  - $L_q$  = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย
  - $w_S$  = เวลาที่เฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายเสียไปในการรับบริการในระบบ
  - $w_q$  = เวลาที่เฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายเสียไปในการรับบริการในแถวคอย
  - $p_n$  = ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า  $n$  รายในระบบ
- 
- \*\*\* ข้อมูลของค่า  $\lambda$  และ  $\mu$  ที่ใช้ในการคำนวณจะต้องเป็นข้อมูลในเวลาเดียวกัน เช่น การเข้ามารับบริการเป็นจำนวนลูกค้าเป็นชั่วโมง อัตราการให้บริการต้องเป็นจำนวนลูกค้าต่อชั่วโมง ด้วย

## 8.5 ตัวแบบ M/M/1

- ระบบแถวคอยที่จะใช้ตัวแบบ M/M/1
- วั่งมีลักษณะดังต่อไปนี้

- 1) อัตราการเข้ามารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวซอง
- 2) เวลาในการให้บริการแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือแจกแจงแบบปัวซอง
- 3) เป็นการให้บริการแบบช่องทางเดียว ชั้นตอนเดียว
- 4) ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
- 5) จำนวนประชากรมากมาย
- 6) มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน

- สมมติฐานของตัวแบบ **M/M/1** ได้แก่ อัตราการเข้ามารับบริการน้อยกว่าอัตราการให้บริการ

หรือ  $\lambda < \mu$

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} & p &= \lambda / \mu \\ L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} & p_0 &= 1 - \lambda / \mu \\ w_s &= \frac{1}{\mu - \lambda} & p_n &= p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \\ w_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

## ตัวอย่างที่ 8.1

- ร้านสะดวกซื้อแห่งหนึ่งมีพนักงานเก็บเงิน 1 คน จากการเก็บข้อมูลในอดีตพบว่าลูกค้าเข้ามาชำระเงินค่าสินค้าเป็นแบบสุ่มเฉลี่ยชั่วโมงละ 20 ราย มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง ในขณะที่การให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาอย่างน้อยต่างกัน โดยมีค่าเฉลี่ยรายละ 2 นาที มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งหมายถึงอัตราการให้บริการเฉลี่ย  $60/2 = 30$  ราย/ชั่วโมง จำนวนประชากรมีมากมายและจำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยมีได้ไม่จำกัด โดยที่ใครมาก่อนจะได้รับบริการก่อน พิจารณาจากข้อมูลทั้งหมดแล้วสอดคล้องกับตัวแบบ M/M/1 ทั้งนี้ก่อนใช้ตัวแบบจะต้องตรวจสอบสมมติฐานของตัวแบบซึ่งพบว่าค่า  $\lambda < \mu$  ( $\lambda = 20$  ราย/ชั่วโมง  $\mu = 30$  รายชั่วโมง)

• จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ  $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{30 - 20} = 2$  ราย

• จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย  $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20^2}{30(30 - 20)} = 1.33$  ราย

• เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายใช้ในระบบ  $w_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30 - 20} = 1/10$  ชั่วโมง (6 นาที)

• เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละรายใช้ในแถวคอย  $w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{30(30 - 20)} = 1/15$  (4 นาที)

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงานหรือการใช้งานของระบบ

$$p = \lambda / \mu = 20 / 30 = 0.67$$

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$$p_0 = 1 - \lambda / \mu = 1 - 20 / 30 = 1 - 0.67 = 0.33$$

## 8.6 ตัวแบบM/M/s

- ตัวแบบนี้มีลักษณะเหมือน **M/M/1** เกือบทุกประการ ยกเว้นจะใช้ได้เหมาะสมกับระบบแถวคอยที่มีลักษณะขั้นตอนเดียวแต่หลายช่องทางบริการ สรุปลักษณะของระบบแถวคอยที่ควรใช้ตัวแบบนี้คือ
- 1) อัตราการเข้ามารับบริการเป็นแบบลุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวซอง
- 2) เวลาในการให้บริการเป็นแบบลุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรืออัตราการให้บริการมีการแจกแจงแบบปัวซอง
- **3) เป็นการให้บริการหลายช่องทาง ขั้นตอนเดียว**
- 4) ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
- 5) จำนวนประชากรมากมาย
- 6) มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน



- สมมติฐาน  $M/M/s$  ได้แก่อัตราการมารับบริการน้อยกว่าผลคูณของจำนวนช่องทางบริการกับอัตราการให้บริการ  $\lambda < s\mu$
- การใช้ตัวแบบ  $M/M/s$  เพื่อวิเคราะห์ระบบแถวคอย จะใช้สูตรการคำนวณดังนี้

$$P = \lambda / s\mu$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \left[ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \times \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right]}$$

$$L_q = P_0 \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^s \cdot p}{s!(1-p)^2} \right\}$$

$$L_S = L_q + \lambda/\mu$$

$$W_q = L_q + \lambda$$

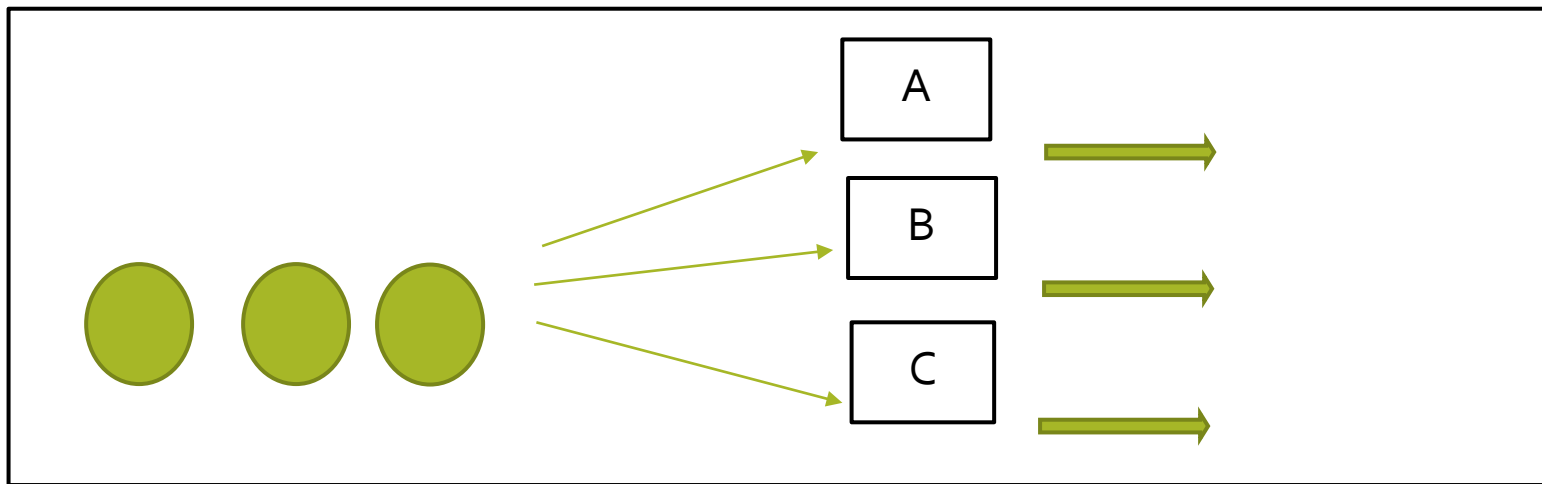
$$W_s = W_q + 1/\mu$$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } n \leq s$$

$$P_n = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{(s!s)^{n-s}} \quad \text{เมื่อ } n > s$$

## ตัวอย่างที่ 8.2

- โรงภาพยนตร์แห่งหนึ่งพนักงานให้บริการจำหน่ายบัตรชมภาพยนตร์ จำนวน 3 คน โดยลูกค้าจะเข้าแถวเป็นแถวเดียว และเมื่อพนักงานคนใดว่าง ลูกค้าจะเข้ารับบริการที่พนักงานคนนั้น ลูกค้าของโรงภาพยนตร์มีจำนวนมาก และมีพื้นที่ที่ลูกค้าจะเข้าแถวรอในแถวคอยได้มาก ราย โดยเฉลี่ยแล้วลูกค้าจะเข้ามาเพื่อซื้อบัตรชมภาพยนตร์ในอัตราเฉลี่ย 72 ราย/ชั่วโมง (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง) ในขณะที่พนักงานแต่ละคนใช้เวลาในการให้บริการเฉลี่ยรายละ 2 นาที ผลการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล) หรือให้บริการได้เฉลี่ยชั่วโมงละ 30 ราย



- จากการพิจารณาข้อมูล ลักษณะของตัวแบบแถวคอย สมมติฐานของตัวแบบสรุปได้ว่าสามารถใช้ตัวแบบ M/M/s ในการวิเคราะห์การให้บริการซื้อบัตรชมภาพยนตร์ ดังนี้

- ค่า  $\lambda = 72$  ราย/ชั่วโมง และ มีค่า  $\lambda < s\mu$  คือ  $72 < 3(30)$

- ค่า  $\mu = 30$  ราย/ชั่วโมง

- ค่า  $s = 3$  หน่วยบริการ

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงานหรือการใช้งานของระบบ

$$P = 72/90 = 0.80$$

- ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$$P_0 = 1 / \left\{ \frac{(2.4)^{\boxed{0}}}{0!} + \frac{(2.4)^{\boxed{1}}}{1!} + \frac{(2.4)^{\boxed{2}}}{2!} \right\} + \left\{ \frac{(2.4)^{\boxed{3}}}{3!} \times \frac{90}{90-72} \right\} = 0.0562^{**}$$

\*\* คำตอบ = 0.562 คือ ค่าที่ได้จากการเปิดตาราง  $\lambda / s\mu = 0.80$  และ ค่า  $s = 3$

(แต่ถ้าหาค่าคำนวณจะได้ = 0.0595)

- จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย<sup>3</sup>

$$L_q = \frac{0.562 (2.4) (0.80)}{3!(1-0.80)^2} = 2.589 \text{ ราย}$$

- จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

$$L_s = 2.589 + 2.4 = 4.989 \text{ ราย}$$

- เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าอยู่ในแถวคอย

$$W_q = 2.589/72 = 0.036 \text{ ชั่วโมง} = 2.16 \text{ นาที}$$

- เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าอยู่ในระบบ

$$W_s = 0.036 + 1/30 = 0.0693 \text{ ชั่วโมง} = 4.16 \text{ นาที}$$

## ■ การเพิ่มประสิทธิภาพหน่วยให้บริการ

- การที่จะพัฒนาระบบแถวคอยให้สามารถบริการลูกค้าได้ดีขึ้นนั้น ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงการเพิ่มจำนวนหน่วยให้บริการเพียงอย่างเดียว อาจจะมีจำนวนหน่วยให้บริการเท่าเดิม แต่เป็นหน่วยให้บริการที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น การเพิ่มประสิทธิภาพให้หน่วยบริการ อาจมีหลายวิธีดังนี้
  - 1. เพิ่มเครื่องมือ อุปกรณ์ เช่น รถยก
  - 2. เปลี่ยนเครื่องมือที่ทันสมัยขึ้น หรืออัตโนมัติมากขึ้น
  - 3. เพิ่มจำนวนพนักงานในหน่วยบริการ

แต่ละวิธีจะช่วยทำให้บริการลูกค้าได้รวดเร็วขึ้น ทำให้อัตราการให้บริการสูงขึ้น ซึ่งจะส่งผลดีต่อประสิทธิภาพในการให้บริการของระบบ รวมถึงค่าใช้จ่ายในการเสียเวลาของลูกค้าจะลดลงด้วย